

Optimisation de formes et problèmes spectraux

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

08/12/2015

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$$

Questions ?

- existence
- régularité
- la forme optimale est-elle explicite ?
- résultats qualitatifs
- calculs numériques

Optimisation spectrale

Lord Rayleigh - *The Theory of Sound* (1877)

Le tambour

Le disque minimise l'aire a fréquence donnée



Faber-Krahn (1920-1923)

Le disque minimise $\lambda_1(\Omega)$ a
aire fixée

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1(\Omega)u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

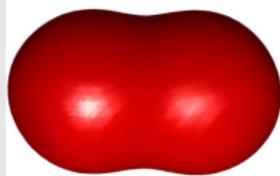
- optimisation valeurs propres en géométrie spectrale
 - A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*
- systèmes en compétition, dynamique des populations
 - Ramos, Tavares, Terracini, *Existence and regularity of solutions to optimal partition problems involving Laplacian eigenvalues*, ARMA 2015
- localisation des fonctions propres
 - David, Filoche, Jerison, Mayboroda, *A free boundary problem for the localization of eigenfunctions*

Structure de la thèse

1. Optimisation sous contrainte de périmètre
2. Partitionnement et périmètre anisotrope
3. Problème spectral multiphase
4. Valeurs propres de Steklov
5. Optimisation de formes sur des surfaces

1. Optimisation sous contrainte de périmètre

- Approche Γ -convergence : $\lambda_k + \text{Per}$
- Optimisation numérique 2D, 3D
- Conditions d'optimalité vp multiples
- Verification numerique - conjecture Polya



2. Partitionnement et périmètre anisotrope

3. Problème spectral multiphase

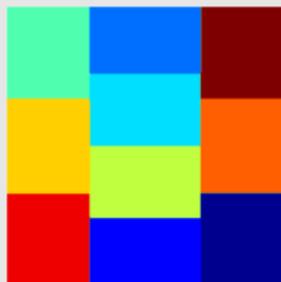
4. Valeurs propres de Steklov

5. Optimisation de formes sur des surfaces

Structure de la thèse

1. Optimisation sous contrainte de périmètre
2. Partitionnement et périmètre anisotrope

- Approximation par Γ -convergence
- Calculs numériques

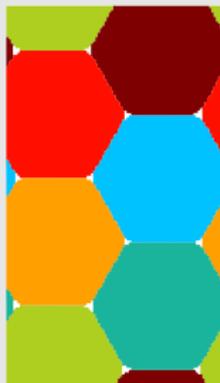


3. Problème spectral multiphase
4. Valeurs propres de Steklov
5. Optimisation de formes sur des surfaces

Structure de la thèse

1. Optimisation sous contrainte de périmètre
2. Partitionnement et périmètre anisotrope
3. Problème spectral multiphase

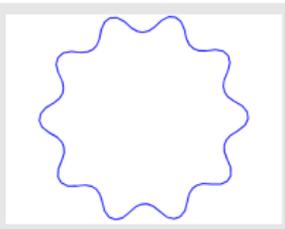
- Calculs numériques
- Formule de monotonie à deux phases
- non-existence points tripes sur le bord



4. Valeurs propres de Steklov
5. Optimisation de formes sur des surfaces

Structure de la thèse

1. Optimisation sous contrainte de périmètre
2. Partitionnement et périmètre anisotrope
3. Problème spectral multiphase
4. Valeurs propres de Steklov
 - Stabilité, résultats d'existence
 - Méthode solutions fondamentales
 - Estimation d'erreur
 - Optimisation numérique
5. Optimisation de formes sur des surfaces

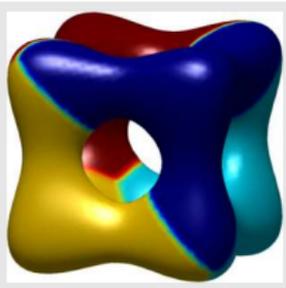


Structure de la thèse

1. Optimisation sous contrainte de périmètre
2. Partitionnement et périmètre anisotrope
3. Problème spectral multiphase
4. Valeurs propres de Steklov
5. Optimisation de formes sur des surfaces

Partitions des surfaces en \mathbb{R}^3

- Périmètre minimal
- Optimisation partitions spectrales



1 Optimisation sous contrainte de périmètre

2 Problème spectral multiphase

3 Valeurs propres Steklov

Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Quotients Rayleigh :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{S_k \subset H_0^1(\Omega)} \max_{\phi \in S_k \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}$$

Dilatation : $\lambda_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2} \lambda_k(\Omega)$.

Monotonie : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$



Contrainte volume

- formes optimales explicites pour $k \in \{1, 2\}$
- résultats d'existence (Bucur, Mazzoleni - Pratelli 2012)
- calculs numériques (Oudet 2004 et Antunes, Freitas 2012)

Contrainte périmètre

- forme optimale explicite pour $k = 1$
- résultats qualitatifs pour $k = 2$ en 2D (Bucur, Buttazzo, Henrot 2009)
- résultats d'existence et régularité (De Philippis, Velichkov 2012)

Description des résultats

1. Γ -convergence : phase unique pour Modica-Mortola et mesure capacitaire
2. Approximation numérique par Γ -convergence et validation par représentation Fourier radiale
3. Analyse qualitative des conditions d'optimalité - valeurs propres multiples

- Lignes de niveaux + calcul vp éléments finis (Oudet, 2003)
- Paramétrisation radiale, coefficients Fourier
 - Calcul vp - sol. particulières, MpsPack (Osting)
 - solutions fondamentales (Osting 2010, Antunes, Freitas 2012)

$$\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \lambda_k(\Omega)$$

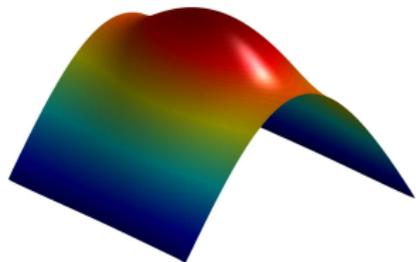
équivalent à une homothétie près à

$$\min (\lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega)) .$$

- en 2D les formes optimales sont convexes
- la forme optimale pour $k = 1$ est une boule

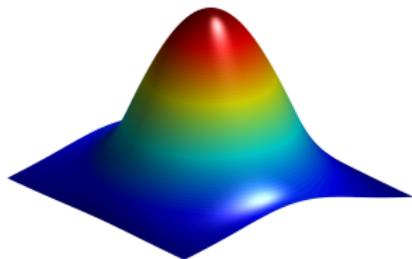
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



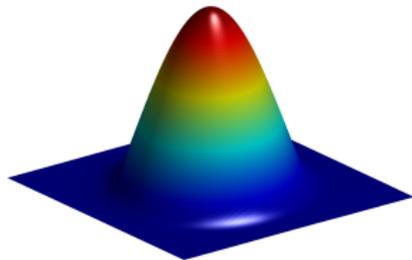
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



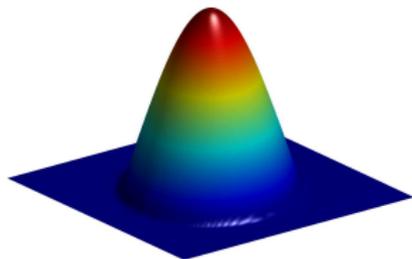
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



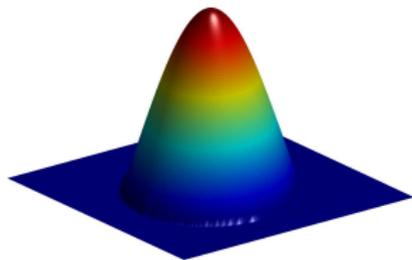
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Valeur propre

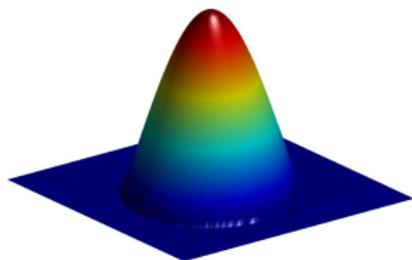
$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Motivation

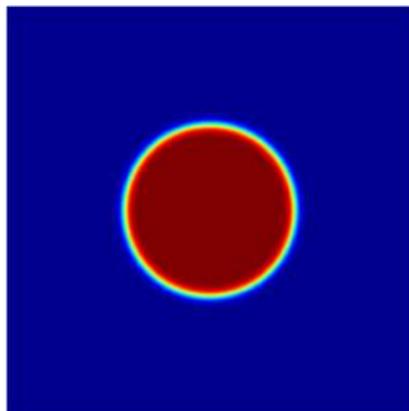
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

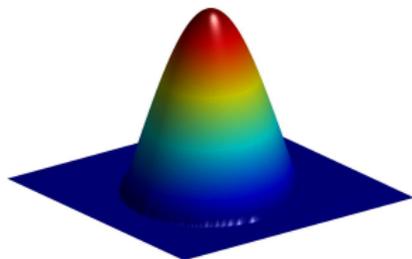
$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Motivation

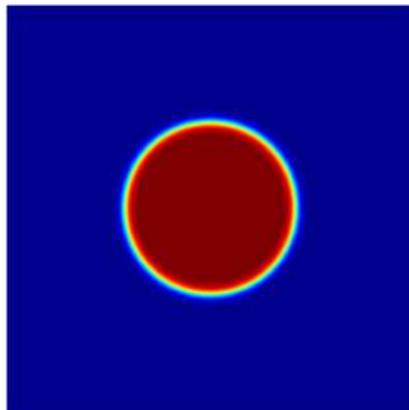
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



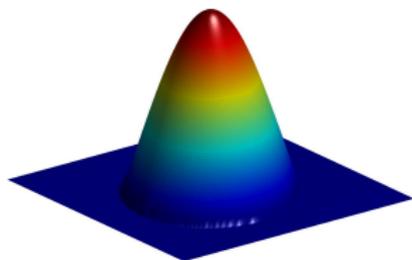
Périmètre

$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



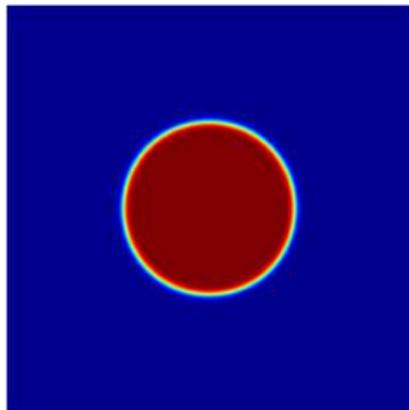
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

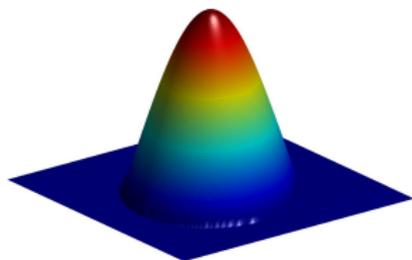
$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Motivation

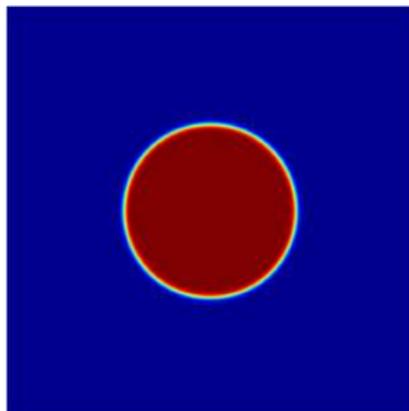
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



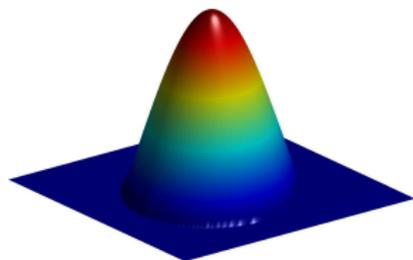
Périmètre

$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



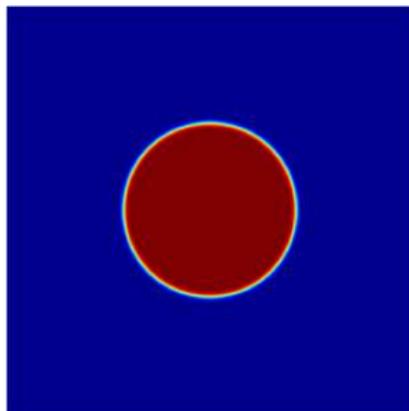
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Γ -convergence

Soit $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon > 0$ et X est un espace métrique.

On dit que F_ε Γ -converge vers F si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(LI) Pour chaque $u \in X$ et chaque suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

(LS) Pour chaque $u \in X$ il existe une suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

- (i) La Γ -limite F est semi continue-inférieurement sur X ;
- (ii) Stabilité pour des perturbations continues ;
- (iii) Convergence des minimiseurs

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F \Rightarrow \operatorname{argmin} F_\varepsilon \rightarrow \operatorname{argmin} F$$

Théorème de Modica-Mortola

$D \subset \mathbb{R}^N$ borné, ouvert.

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_D \left[\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2 (1-u)^2 \right] dx & u \in H^1(D), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega, D) & u \in BV(D; \{0, 1\}), \Omega = u^{-1}(1), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Modica-Mortola

F_ε Γ -converge vers F dans la topologie $L^1(D)$.

Combiner les deux approches

Idée générale

Utiliser la même fonction de phase pour approcher le périmètre et la valeur propre

$$\lambda_k(\Omega) \quad + \quad \text{Per}(\Omega)$$

$$\mathcal{F}(\varphi) = \lambda_k(C(1 - \varphi))dx + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2(1 - \varphi)^2 dx$$

$$\text{Choix } C = 1/\varepsilon^2$$

Résultat Γ -convergence

$$J_\varepsilon, J : L^1(D, [0, 1]) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$J_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k \left(\frac{1 - \varphi}{\varepsilon^2} dx \right) + & \text{si } \varphi \in H^1(D) \\ +\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx & \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$J(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k(\Omega) + \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega) & \text{si } \varphi = \chi(\Omega) \in BV(D, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème

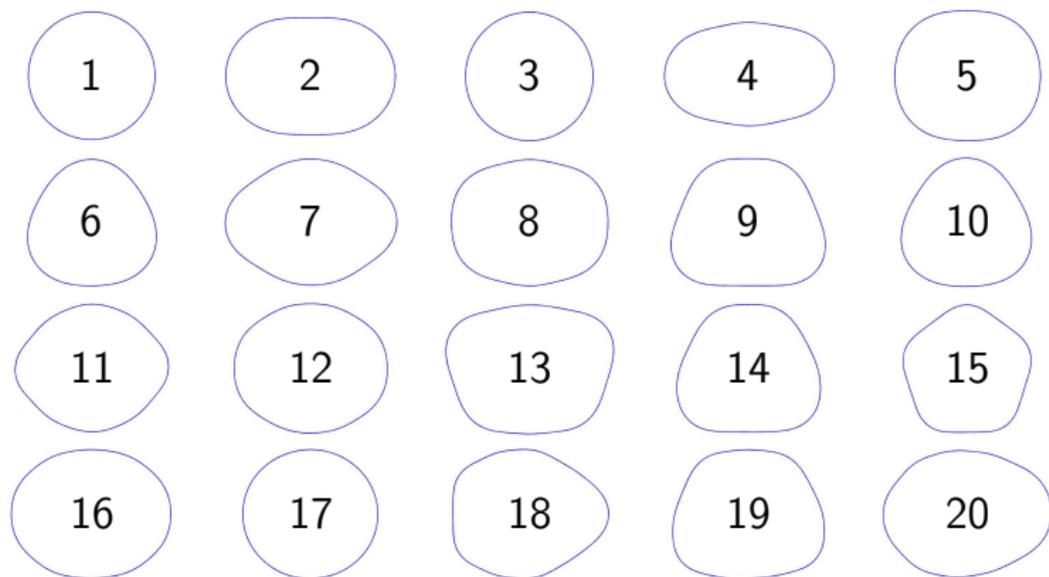
$J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J$ dans la topologie de $L^1(D)$.

- $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ et $G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G \not\Rightarrow F_\varepsilon + G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F + G$;
- (LI) \longrightarrow OK ;
- (LS) non : on doit trouver la même suite qui réalise la limite dans (LS).

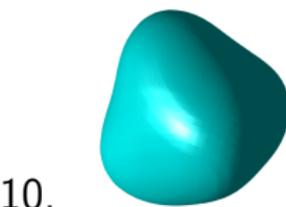
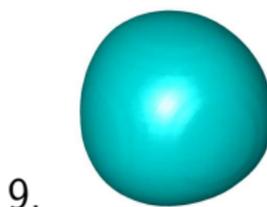
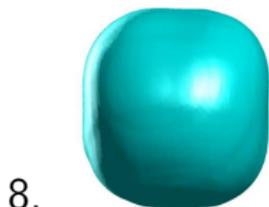
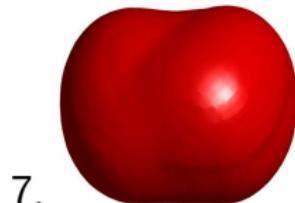
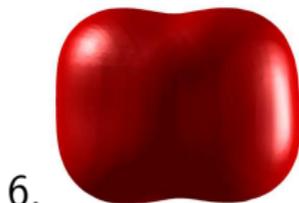
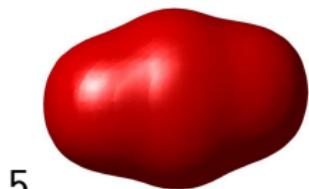
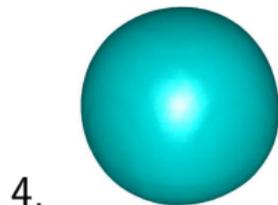
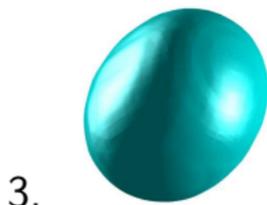
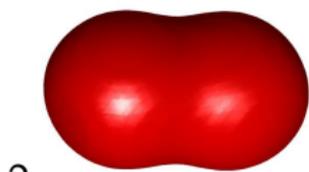
$D = [0, 1]^2$ avec une grille uniforme $N \times N$.

- quadrature + différences finies pour Modica-Mortola ;
- $\lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon^2} dx \right) \longrightarrow \left[A + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - \varphi)I \right] u = \lambda u$;
- algorithme du gradient ;
- choix initial aléatoire $\Rightarrow k$ boules (minimum local) ;
- difficulté résolue si densité aléatoire *non-uniforme*.

Résultats



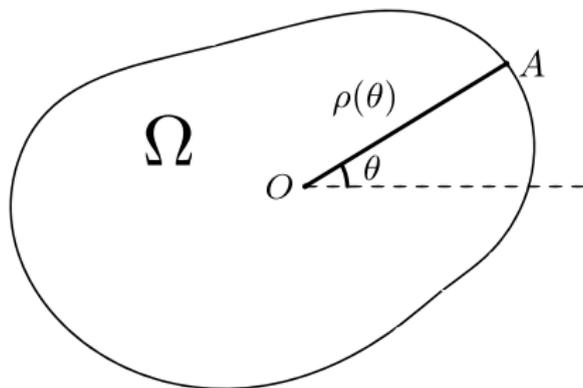
Extension directe en dimension trois



Validation des résultats en 2D

- en 2D la forme optimale est convexe

$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$



$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

Développement en série de Fourier

- $\rho \in C^{1,\alpha}$ (conjecture C^∞)

$$\rho(\theta) \approx \rho_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

Pour Ω_N donné par ρ_N

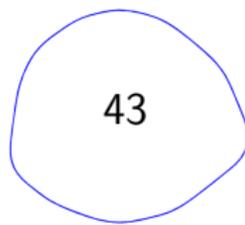
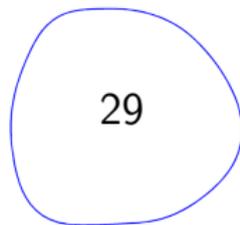
$$|\lambda_n(\Omega_N) - \lambda_n(\Omega)| \leq C_{n,r_\Omega} \sum_{k \geq N+1} (|a_k| + |b_k|).$$

Cox, Ross, Osting

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial a_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

Optimisation

- algorithme d'optimisation basé sur le gradient (LBFGS)
- point de départ aléatoire pour éviter les minima locaux ;
 - calcul des valeurs/fonctions propres avec MpsPack ;
 - calculs faits pour $k \leq 50$;
 - P. Antunes and P. Freitas (2015) ont fait les mêmes calculs : on au moins 10 formes qui sont meilleures ($k = 11, 20, 31, 36, 37, 38, 40, 43, 46, 49$).
 - les formes optimales sont presque toutes symétriques ; exceptions :



Comparaison des deux méthodes

| k | mult. | Γ -conv | Fourier | k | mult. | Γ -conv | Fourier |
|-----|-------|----------------|---------|-----|-------|----------------|---------|
| 1 | 1 | 11.55 | 11.55 | 11 | 2 | 24.62 | 24.60 |
| 2 | 1 | 15.28 | 15.28 | 12 | 3 | 24.76 | 24.74 |
| 3 | 2 | 15.75 | 15.75 | 13 | 1 | 25.98 | 25.98 |
| 4 | 2 | 18.35 | 18.35 | 14 | 2 | 26.43 | 26.43 |
| 5 | 2 | 19.11 | 19.11 | 15 | 1 | 26.91 | 26.91 |
| 6 | 1 | 20.09 | 20.09 | 16 | 3 | 27.27 | 27.25 |
| 7 | 2 | 21.50 | 21.50 | 17 | 3 | 27.37 | 27.36 |
| 8 | 2 | 22.07 | 22.02 | 18 | 2 | 28.66 | 28.63 |
| 9 | 1 | 23.21 | 23.21 | 19 | 2 | 29.09 | 29.08 |
| 10 | 2 | 23.58 | 23.55 | 20 | 3 | 29.53 | 29.51 |

Contrainte perimetre vs contrainte volume

- contrainte volume $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ est multiple pour $k \geq 2$
- contrainte périmètre $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ est simple pour $k = 2$
(BBH, 2009), 6, 9, 13, 15

Pourquoi ?

Pour λ simple on a

Contrainte volume

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla u|^2 = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Contrainte périmètre

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla u|^2 = \mathcal{H} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Conjecture (Schiffer)

Si (1) a une solution non-triviale alors Ω est un disque.

A. Berger, *The eigenvalues of the Laplacian with Dirichlet boundary condition in \mathbb{R}^2 are almost never minimized by disks* (2015)

- λ_k simple, V champ de vecteurs

$$\frac{d\lambda_k(\Omega)}{dV} = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V \cdot n d\sigma$$

→ a l'optimum on a $\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$

Conditions d'optimalité : multiplicité > 1

On perd la différentiabilité !

Contrainte de volume :

- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = 1$$

- Ahmad El Soufi, Saïd Ilias. *Domain deformations and eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in a Riemannian manifold*
- Nadirashvili, *Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces*

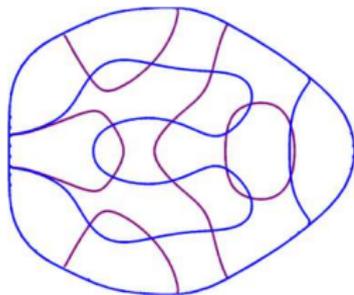
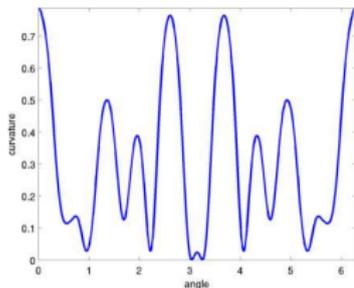
Contrainte de périmètre, hypothèse de régularité C^3 :

- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$

Conséquences

- $\mathcal{H}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(x) = 0$



- la frontière d'un minimiseur local ne contient pas de segment (partie plate en $\dim > 2$)
- argument bootstrap (BBH) - régularité $C^3 \rightarrow C^\infty$. Il reste à prouver $C^{1,\alpha} \rightarrow C^3$?

Conditions d'optimalité : vérification numérique

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$



$$\mathcal{H} \in \text{span} \left(\left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right)^2, i = 1..p \right\} \cup \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial u_j}{\partial n}, 1 \leq i < j \leq p \right\} \right).$$

combinaison exprimable comme une somme des carrées.

Numériquement - moindres carrés :

$$\min_{\substack{(\alpha_i)_{i=1}^p, \\ (\beta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}}} \sum_{h=1}^l \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (\partial_n u_i(x_h))^2 + \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \beta_{i,j} \partial_n u_i(x_h) \partial_n u_j(x_h) - \mathcal{H}(x_h) \right)^2$$

- très bon indicateur d'un minimum local
- erreur $L^\infty < 10^{-4}$ pour $k \leq 15$ en 2D

- 1 Optimisation sous contrainte de périmètre
- 2 Problème spectral multiphase
- 3 Valeurs propres Steklov

Problème spectral multiphase

$$\min \sum_{i=1}^n (\lambda_1(\Omega_i) + \alpha |\Omega_i|), \quad (\Omega_i) \text{ disjointes dans } D$$

Bucur, Velichkov (2014), David, Filoche, Jerison, Mayboroda (2015)

Objectif initial...

- valider numériquement les résultats théoriques

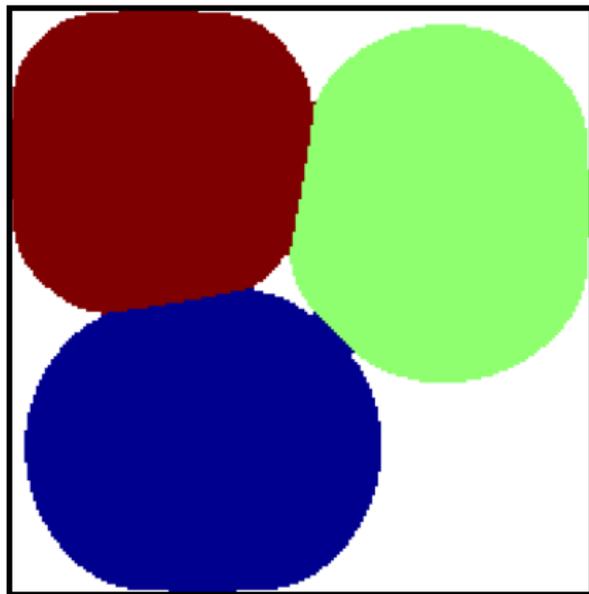
Méthode numérique

- Bourdin, Bucur, Oudet - formulation relaxée
- ajout d'une phase supplémentaire

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i = 1.$$

Observations

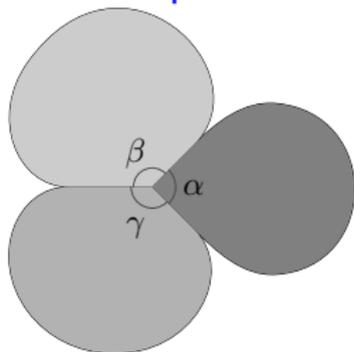
- Absence de points triples (Bucur, Velichkov)
- Absence de points triples sur le bord
- Absence d'angles



Heuristique de formules de monotonie

u_i fp secteur angle mesure $\theta \Rightarrow u_i \sim r^{\pi/\theta}$, $|\nabla u_i|^2 \sim r^{2\pi/\theta-2}$

trois phases

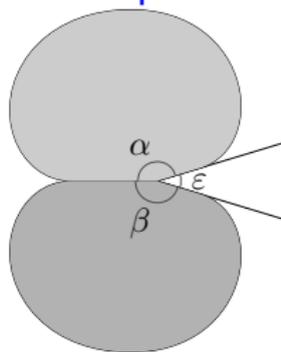


$$\prod_{i=1}^3 \int_{B_r} |\nabla u_i|^2 \leq r^{\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\beta} + \frac{2\pi}{\gamma} - 6}$$

$$\prod_{i=1}^3 \int_{B_r} |\nabla u_i|^2 \leq r^3$$

si $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

deux phases



$$\prod_{i=1}^2 \int_{B_r} |\nabla u_i|^2 \leq r^{\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\beta} - 4}$$

$$\prod_{i=1}^2 \int_{B_r} |\nabla u_i|^2 \leq r^\epsilon$$

si $\alpha + \beta < 2\pi$

Théorème de monotonie

$u_i \geq 0 \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$, $u_1 u_2 = 0$, $\lambda_i \geq 0$, $\Delta u_i + \lambda_i u_i \geq 0$,
 $\liminf_{r \rightarrow 0} |\{u_i = 0\} \cap B_r| / |B_r| > 0$

$$\int_{B_r} |\nabla u_1|^2 \int_{B_r} |\nabla u_2|^2 = o(r^\varepsilon).$$

Sous-solutions

$$\lambda_1(\omega_i) + \alpha|\omega_i| \leq \lambda_1(\omega) + \alpha|\omega|, \quad \forall \omega \subset \omega_i$$

D. Bucur (2012)

Non-degeneration du gradient : $x_0 \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_i|^2 \geq C > 0.$$

Conséquences

- absence de points triples au bord si ∂D est Lipschitz
- absence d'angles de mesure $< \pi$

- 1 Optimisation sous contrainte de périmètre
- 2 Problème spectral multiphase
- 3 Valeurs propres Steklov

Problème Steklov

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, assez régulier, simplement connexe on considère

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$0 = \sigma_0 \leq \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Caractérisation variationnelle :

$$\sigma_n(\Omega) = \inf_{S_n} \sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$S_n \subset H^1(\Omega) \cap \left\{ \int_{\partial\Omega} u = 0 \right\};$$

$$\sigma_k(t\Omega) = \frac{1}{t} \sigma_k(\Omega).$$

Simplement connexes :

- $\max \sigma_1$ sous contrainte de perimetre en 2D (Weinstock)
- $\max \sigma_1 \sigma_2$ sous contrainte de périmètre en 2D (Hersch-Payne)
- $\min \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k}$ sous contrainte de périmètre en 2D (Hersch-Payne-Schiffer)

En général :

- $\max \sigma_1$ sous contrainte de volume

Toujours le disque...

- Stabilité spectrale sous conditions de rigidité

Convergence des traces

Si $(\Omega_n), \Omega \subset D$ sont des ouverts connexes, vérifient une condition de ε -cone, $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans H^1 alors

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} |u_n|^p.$$

Si $\text{Per}(\Omega_n) \rightarrow \text{Per}(\Omega)$ on a égalité.

- Existence de formes optimales
 - Contrainte volume + convexité (Chapitre 4)
 - Contrainte volume, relaxation (B., Bucur, Giacomini - en cours)

- Résoudre l'EDP analytiquement à l'intérieur du domaine
- erreur condition au bord assez petite (norme L^2)

Question

Une erreur au bord petite implique-t-elle une erreur petite pour la valeur propre ?

Méthode des solutions fondamentales

- $(y_i)_{i=1}^N$ - une famille des points a l'extérieur du domaine Ω ;
- ϕ_i - fonctions harmoniques radiales centrées en y_i ;

$$\Rightarrow u = \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_N \phi_N$$

est harmonique dans Ω .

\Rightarrow il reste a "arranger" (α_i) tels que

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \sigma u \text{ sur } \partial\Omega.$$

Condition au bord

- $(x_i)_{i=1}^N$ - une discrétisation du $\partial\Omega$;
- on impose les conditions

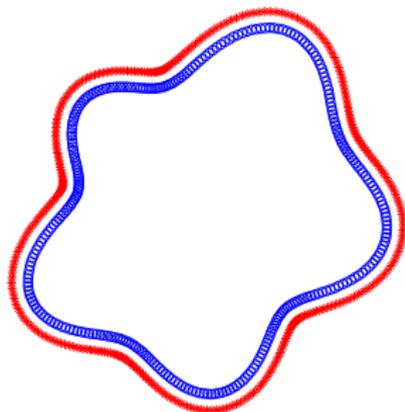
$$\alpha_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}(x_i) + \dots + \alpha_N \frac{\partial \phi_N}{\partial n}(x_i) =$$

$$\sigma(\alpha_1 \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_N \phi_N(x_i)), \quad i = 1..N$$

- $\phi_j(x) = \log |x - y_j|$ (formule analytique) ;
- $A = (\partial_n \phi_j(x_i))_{ij}^N$, $B = (\phi_j(x_i))_{ij}^N$, $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$;
- le problème devient $A\vec{\alpha} = \sigma B\vec{\alpha}$;
- problème valeurs propres généralisées : eigs (Matlab)

Choix centres - important

- Les (x_i) on les choisit uniformément sur $\partial\Omega$ (angles ou longueur d'arc) ;
- Les (y_i) on les choisit sur les normales en (x_i) a $\partial\Omega$ a distance 0.1 des (x_i) .



... limitations de la méthode

Comparaison FreeFem++

| | | FreeFem++ | | | |
|-----|----------|-----------|----------|----------|----------|
| k | MFS | 2096▲ | 33788▲ | 134898▲ | 211290▲ |
| 1 | 0.712751 | 0.714888 | 0.712886 | 0.712785 | 0.712773 |
| 2 | 0.940247 | 0.942837 | 0.940411 | 0.940288 | 0.940274 |
| 3 | 1.381278 | 1.38874 | 1.38175 | 1.3814 | 1.38135 |
| 4 | 1.443204 | 1.45137 | 1.44372 | 1.44333 | 1.44329 |
| 5 | 3.146037 | 3.15592 | 3.14665 | 3.14619 | 3.14614 |
| 6 | 3.443637 | 3.45562 | 3.44438 | 3.44382 | 3.44376 |
| 7 | 3.757833 | 3.78642 | 3.75962 | 3.75828 | 3.75812 |
| 8 | 3.922822 | 3.95461 | 3.92478 | 3.92331 | 3.92313 |
| 9 | 4.274362 | 4.32906 | 4.27774 | 4.27521 | 4.2749 |
| 10 | 4.693207 | 4.75819 | 4.69723 | 4.69422 | 4.69385 |
| t | 0.02s | 0.81s | 6.57s | 24.76s | 41.61s |

Estimation d'erreur

- l'erreur numérique semble être petite ; quantification ?
- méthode similaire Moler-Payne, vp Laplace-Dirichlet :

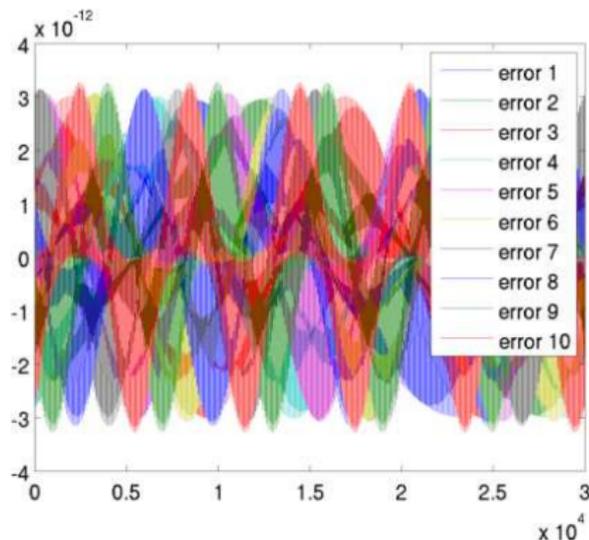
Soit Ω borné, régulier, qui satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \sigma_\varepsilon u_\varepsilon + f_\varepsilon & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1$ et $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} = \delta$ petit. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{|\sigma_\varepsilon - \sigma_k|}{\sigma_k} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

- disque : prédiction théorique erreur : 10^{-12} . Précision numérique : 10^{-12} .



- en général, on voit que

$$\|\partial_n u_{\text{num}} - \sigma_{\text{num}} u_{\text{num}}\|_{L^\infty} = O(10^{-6})$$

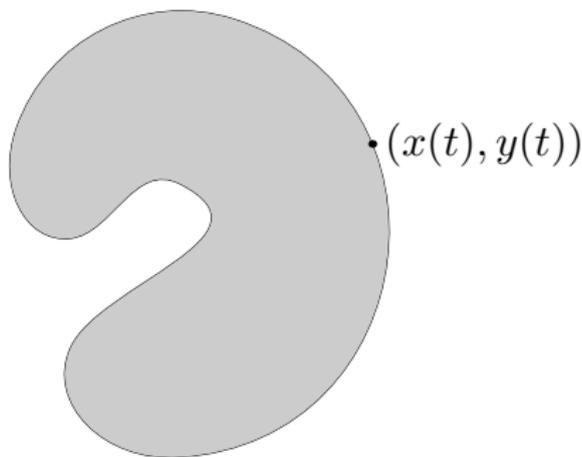
$$\Rightarrow \text{précision d'ordre } 10^{-6}.$$

Restriction au cas radial

Simplement connexité en 2D

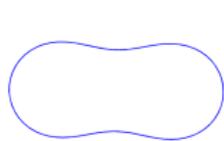
- $\sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega \setminus \Omega'} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega \cup \partial\Omega'} u^2 d\sigma} \leq \sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}$
- donc $\sigma_n(\Omega \setminus \Omega') \leq \sigma_n(\Omega)$;
- finalement $\sigma_n(\Omega \setminus \Omega') |\Omega \setminus \Omega'|^{1/2} \leq \sigma_n(\Omega) |\Omega|^{1/2}$.

Cas non-étoilé

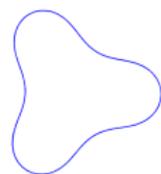


- Weinstock, Hersch-Payne
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$ réalisé par le disque
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{2i-1}(\Omega)\sigma_{2i}(\Omega)|\Omega|}$ réalisé par le disque
- $\max |\Omega|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_i(\Omega)$ réalisé par le disque
- $\min \sum_{i \in A} \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$ réalisé par le disque, où A a la propriété : $1 \in A, 2k \in A \Rightarrow 2k - 1 \in A$.

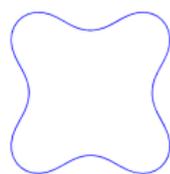
Steklov - contrainte aire



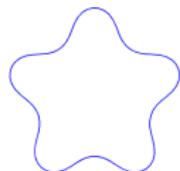
$$\sigma_2 = 2.91$$



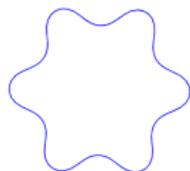
$$\sigma_3 = 4.14$$



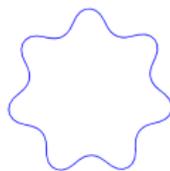
$$\sigma_4 = 5.28$$



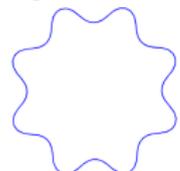
$$\sigma_5 = 6.49$$



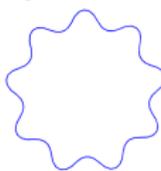
$$\sigma_6 = 7.64$$



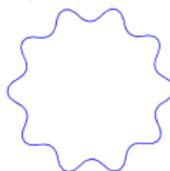
$$\sigma_7 = 8.84$$



$$\sigma_8 = 10.00$$



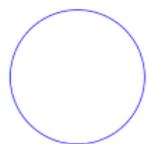
$$\sigma_9 = 11.19$$



$$\sigma_{10} = 12.35$$

FIGURE : Les maximiseurs pour la $k^{\text{ème}}$ vp Steklov sous contrainte d'aire, $k = 2, 3, \dots, 10$.

Steklov - contrainte aire + convexité



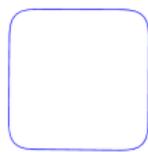
$$\sigma_1 = 1$$



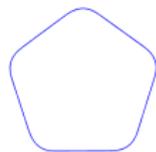
$$\sigma_2 = 2.88$$



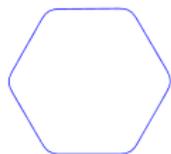
$$\sigma_3 = 3.91$$



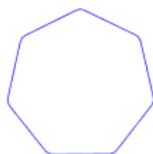
$$\sigma_4 = 4.64$$



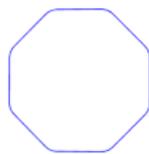
$$\sigma_5 = 5.66$$



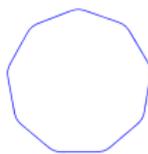
$$\sigma_6 = 6.29$$



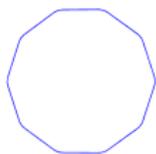
$$\sigma_7 = 7.43$$



$$\sigma_8 = 7.03$$



$$\sigma_9 = 9.21$$



$$\sigma_{10} = 9.79$$

FIGURE : Formes convexes d'aire 1 qui maximisent la $k^{\text{ème}}$ vp

Conclusion et perspectives

- vagues stationnaires

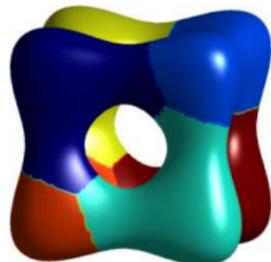
$$\mathcal{L}(\Omega) = \frac{\mu}{\int_{\Omega} |\nabla h_{\Omega}|^2} + g \int_{\Omega} x_2 + \alpha \mathcal{H}^1(S) + \beta \int_S \kappa^2$$

- résultat général d'existence optimiseurs vp Steklov

$\max\{F(\sigma_1(\Omega), \dots, \sigma_k(\Omega)) : \Omega \subset \mathbb{R}^n, |\Omega| = c, \Omega \text{ mesurable}\}$

- Modica-Mortola sur des surfaces

$$\int_S \varepsilon |\nabla_{\tau} u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_S u^2 (1 - u)^2 \xrightarrow{\Gamma} c \text{ Per}$$



- logiciel calcul valeurs propres en 3D

Merci !