Forme de lărgime constantă.

Proprietăți, inegalități

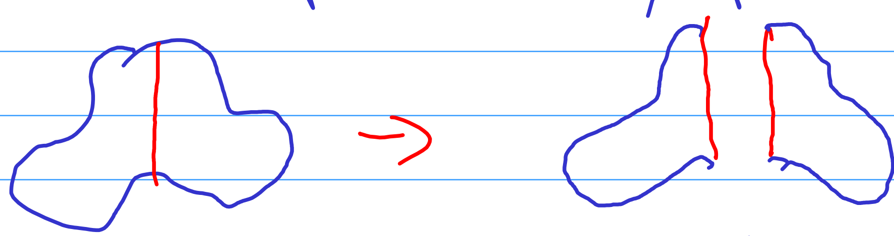
Pb opt formelor: $\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$ → formă geometrică.

Întrebare: există o formă optimală sau nu?

- Exemple: a) $\min_{|\Omega|=c} Per(\Omega) \to$ DA (soluția este discul)

b) $\max_{|\Omega|=c} Per(\Omega) \to$ NU

Pt b) orice formă poate fi modificată pt a-i mări perimetrul, păstrând aria fixă



perim mai MARE!

Tehnici de demonstrare a existenței

În $\mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{l} f:[a,b] \to \mathbb{R} \\ f \text{ continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow \min/\max_{x\in[a,b]} f(x)$ admit soluții

→ $[a,b]$ compact. $(x_n) \subset [a,b] \Rightarrow$ (x_n) conține subșiruri convergente

→ f continuă.

Dacă $x_n \to x^* \Rightarrow f(x_n) \to f(x^*)$

(P) $\min_{x\in[a,b]} f(x)$

- f continuă $\Rightarrow \inf_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$

Șir minimizant

- $\exists (x_n) \subset [a,b]$ a.î. $\underbrace{f(x_n) \to \inf_{x\in[a,b]} f(x)}$

Compacitatea

- (x_n) mărginit $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \to x^* \in [a,b]$

Continuitatea

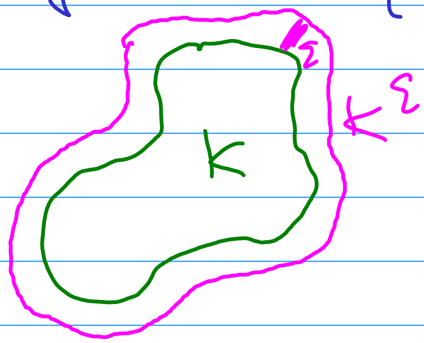
- $\left.\begin{array}{l} f(x_{n_k}) \to f(x^*) \\ \text{Dar } f(x_{n_k}) \to \inf_{x\in[a,b]} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x^*) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$

$\Rightarrow x^*$ este soluție pentru (P)

- x,y : $d(x,y) = |x-y| \to$ distanță pe $\mathbb{R}$
- Putem defini o dist pe spațiul formelor?

Dist Hausdorf:

$\varepsilon > 0$, def $K^{\varepsilon} = \{ x : d(x, K) \leq \varepsilon \}$



Dacă K_1, K_2 sunt compacte in $\mathbb{R}^d$

$$d_H(K_1, K_2) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \begin{array}{l} K_1 \subset K_2^{\varepsilon} \\ K_2 \subset K_1^{\varepsilon} \end{array} \right\}$$

Proprietăți:

Compacitate: (K_n) șir de compacte

$K_n \subset B$ (bilă mărginită)

$\Rightarrow \exists \ (K_{n_k})$ și $K^* \subset B$ a.î.

$d_H(K_{n_k}, K^*) \to 0 \iff K_{n_k} \xrightarrow{H} K^*$

Continuitate: Presupunem K_n compacte convexe, $K_n \xrightarrow{H} K^*$

0) K^* convexă

→ a) $|K_n| \to |K|$

b) $Per(K_n) \to Per(K)$

c) $diam(K_n) \to diam(K)$

d) Lățimea în direcția θ (fixă) e continuă,

etc...

Următoarele probleme admit soluții

$$(P_1) \quad \min_{\substack{|\Omega| = c \\ \Omega \subset B,\ \Omega \text{ convexă}}} Per(\Omega)$$

$$(P_2) \quad \min_{\substack{\text{lățimea lui } \Omega \geq 1 \\ \Omega \text{ convexă}}} |\Omega|$$

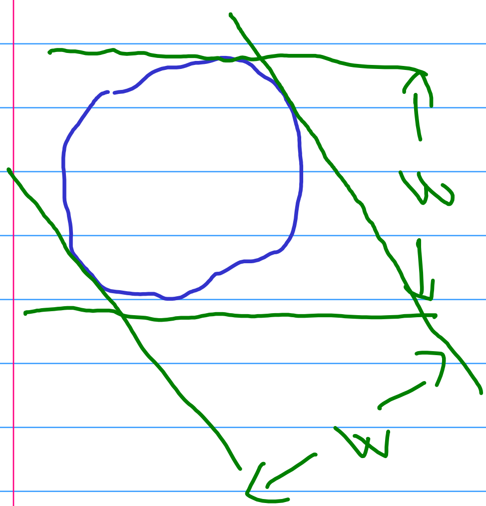
Soluția pt P_2: triunghiul echilateral

$$\boxed{(P_3) \quad \min_{\text{lățimea lui } \Omega \text{ e constantă} = 1} |\Omega|}$$

Soluția pt P_3: triunghiul lui Reuleaux.

Forme de lățime constantă $(= w > 0 = 1)$

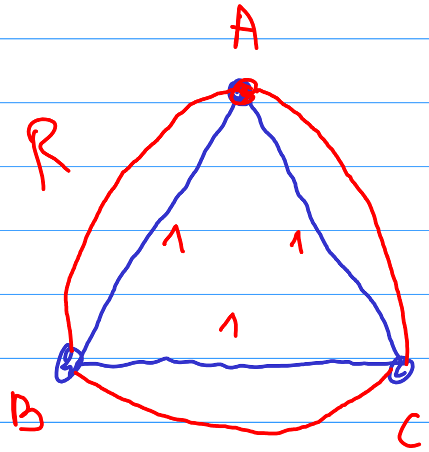
Ω convexă, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ are lățime const w dacă dist. între oricare 2 drepte paralele care încadrează Ω este egală cu w.



Exemplu: Discul

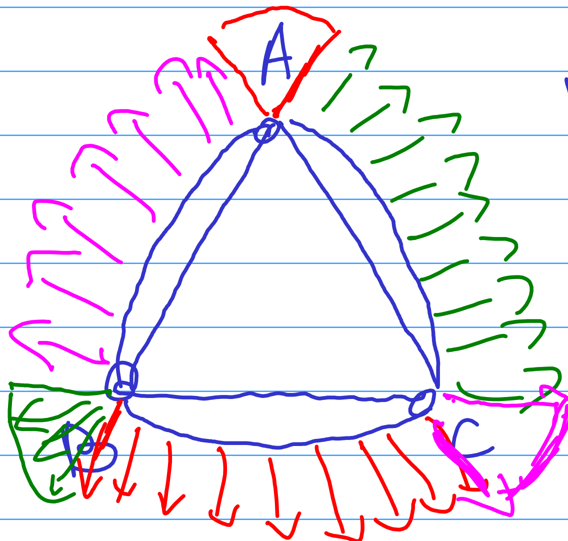
Triunghiul lui Reuleaux:

- Δ echilateral de latură 1
- Bucăți de cerc de rază 1 centrate în colțuri.

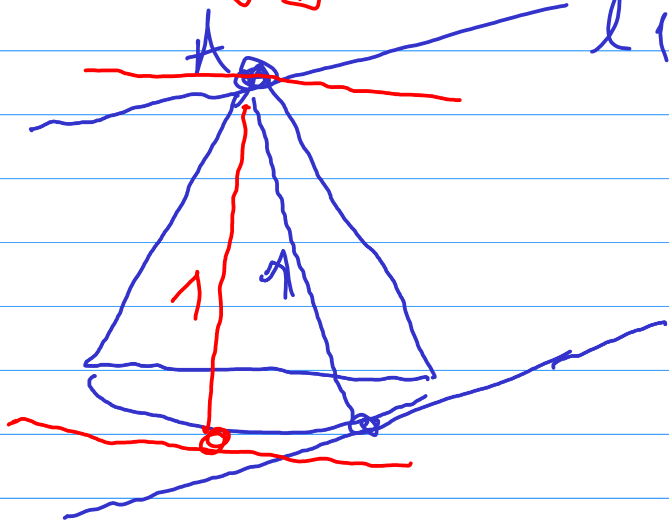


$$R = D(A,1) \cap D(B,1) \cap D(C,1)$$

Raze lățime constantă = 1



Dacă l_1, l_2 sunt 2 tangente paralele atunci una dintre ele trece prin A, B sau C.



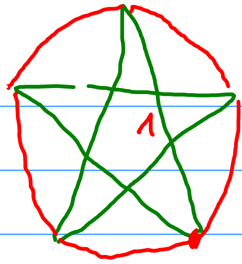
$\Rightarrow$ dist între l_1, l_2 este 1

Aplicații:
- forme pt monede (UK)
- realizarea găurilor (aproape) pătrate
- motor Wankel

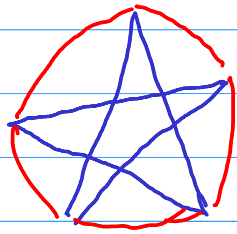
Alte forme de lățime const

n impar $\Rightarrow P_n$ pol regulat cu n laturi și refacem construcția pt triunghi

Pentagon Reuleaux regulat



Există și poligoane Reuleaux neregulate.



Poligon Reuleaux

- formă de lățime const dată de intersecția a n discuri de rază 1 ($n \in \mathbb{N}$ impar)

- orice formă de lățime constantă poate fi aproximată oricât de bine folosind polig. Reuleaux.

Ω lăț. const = 1 $\Rightarrow \exists R_n$ un șir de polig. Reuleaux a.î. $R_n \xrightarrow{H} \Omega$

[Yaglom Boltyanskii - Convex Figures]

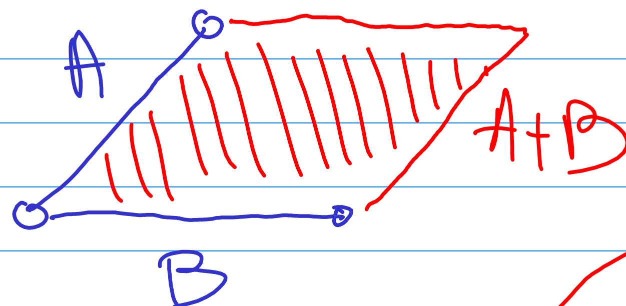
- Capitolul 7

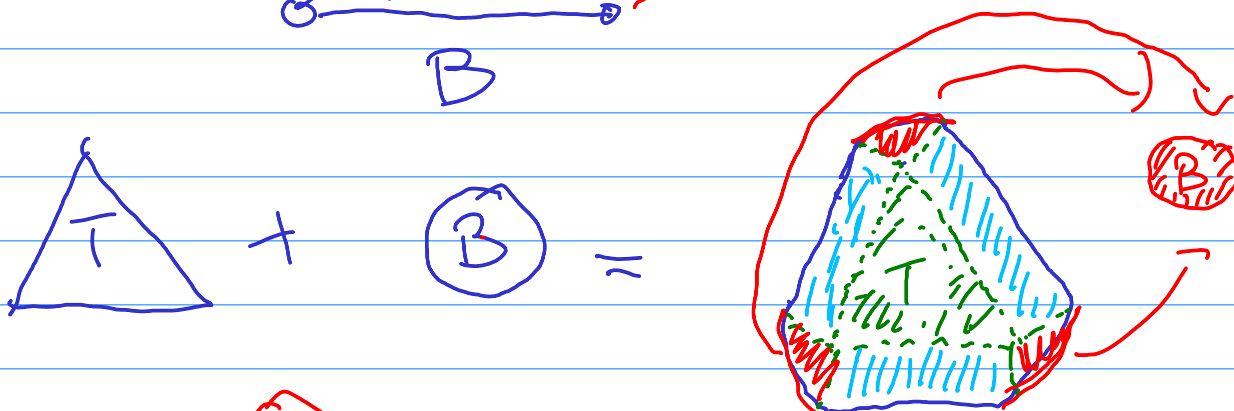
Suma Minkowski

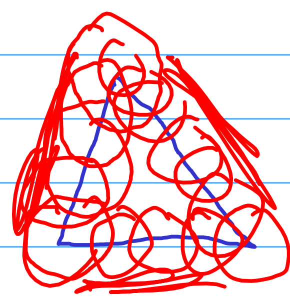
$A, B \subset \mathbb{R}^2$

$$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$$

Exemplu:



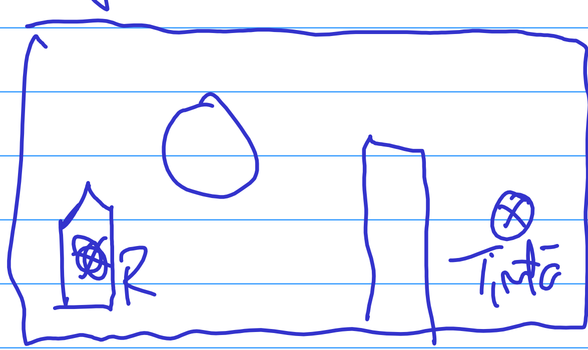




$$|T+B| = |T| + |B| + 2A(T,B)$$

Planif Traiectorii unui robot:

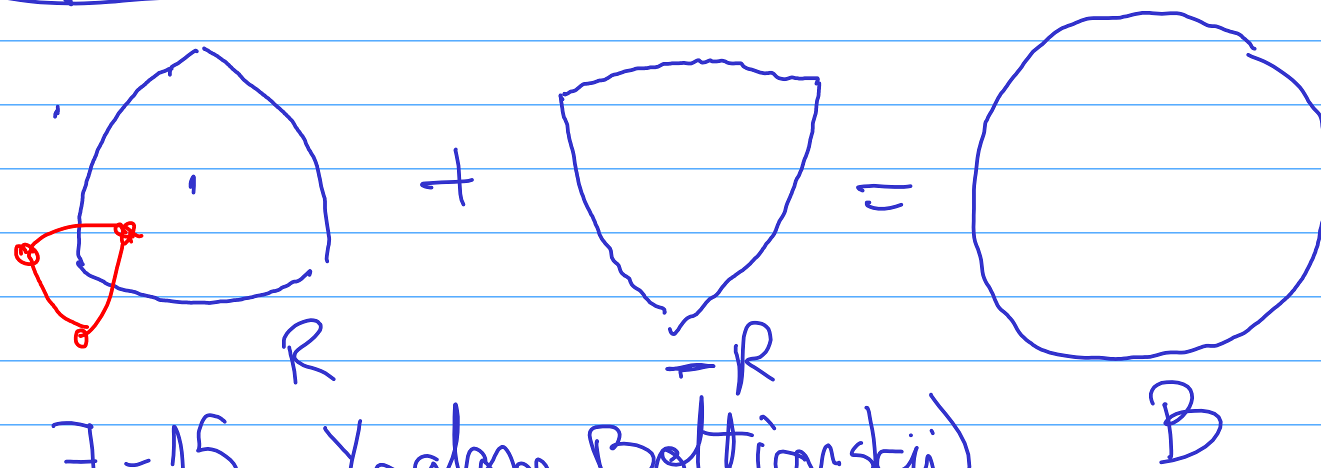
Robotul are o formă



Legătura între sume Minkowski și formele de lărgime constantă:

<u>Proprietate</u>: K are lărgime const 1 atunci $K + (-K) = B$ (discul de rază 1) (simetria de origine)

<u>Triunghi Reuleaux</u>



(Ex 7-15 Yaglom Boltjanskii)

<u>Volume mixte</u>: (Arii mixte)

X, Y două forme convexe

$$|X+Y| = |X| + 2A(X,Y) + |Y|$$

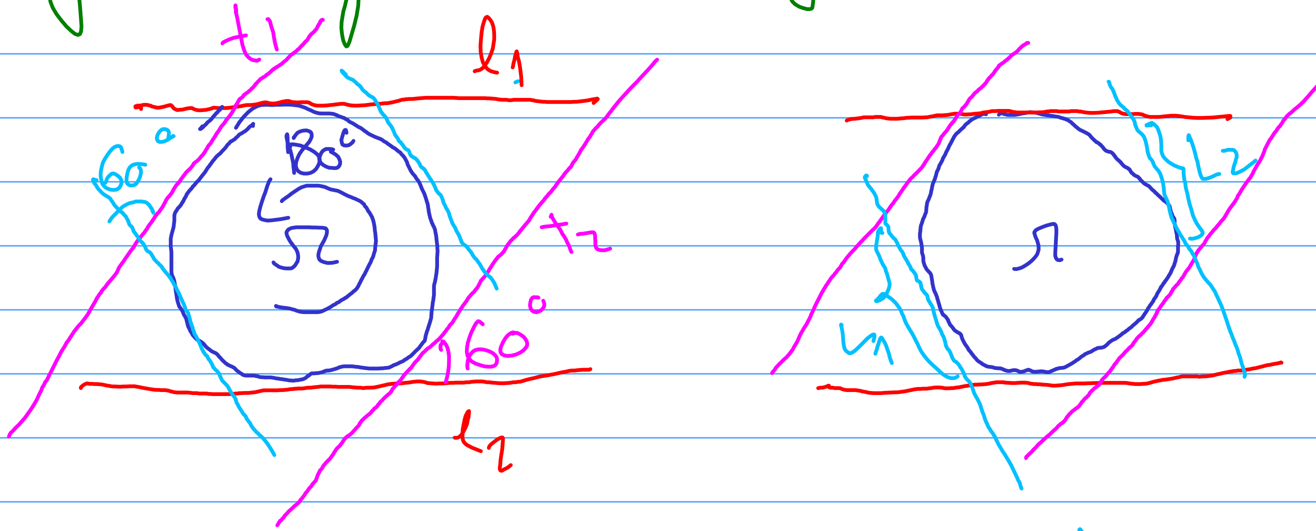
s. Minkowski

• Proprietăți: $X = Y \Rightarrow |X+X| = 4|X|$

$$\Rightarrow A(X,X) = |X|$$

- $X_1 \subset X_2$, $A(X_1,Y) \le A(X_2,Y)$ (monotonie)
- simetrie $A(X,Y) = A(Y,X)$

__Proprietate:__ Orice formă de lățime constantă 1 poate fi inclusă într-un hexagon regulat de lățime 1.

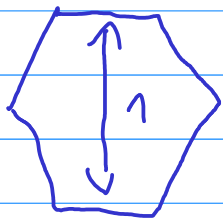


Dacă $L_1 = L_2 \Rightarrow$ am găsit un hexagon regulat circumscris lui Ω.

Dacă $L_1 < L_2$: rotim Ω în mod continuu păstrând l_1, l_2 fixe, t_1, t_2 fixe.

După o rotație cu $180°$ rolul lui L_1 și L_2 s-a inversat

$\Rightarrow \exists$ un unghi pt care avem $L_1 = L_2$ și hexagonul construit circumscris lui Ω este regulat.

H 

<u>Teorema</u>: Triunghiul lui Reuleaux minimizează aria în clasa formelor de lungime constantă.

Dem: Știm că: $K + (-K) = B$ (disc rază 1)
pt K de lungime const 1

$\Rightarrow |B| = |K + (-K)|$

$\Rightarrow 2\pi = |K + (-K)| \overset{\text{arii mixte}}{=} |K| + 2A(K,-K) + |-K| = 2|K| + 2A(K,-K)$

Știm că $K \subset H$, H hex regulat de lung 1

Putem presupune că $-K \subset H$

Din monotonie $A(K,-K) \leq A(H,H) = |H|$

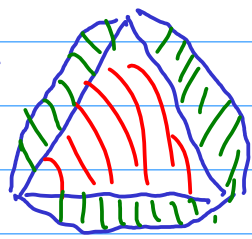
$$\pi = 2|K| + 2A(C_1 - K)$$
$$\le 2|K| + 2|H| \quad |:2$$

$$\frac{\pi}{2} - |H| \le |K|$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \le |K|$$

Pt Reuleaux:

R



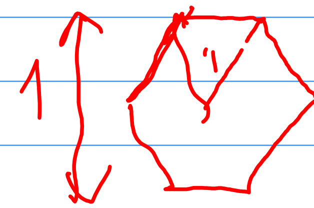
Aria Δ Reuleaux:

$$3 \times \text{(sector } 60^\circ\text{, radius 1)} - 2\,\Delta$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

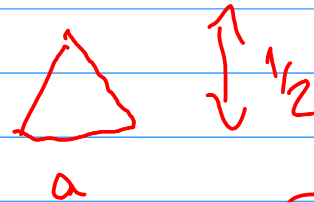
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow |K| \ge \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = |R|$$



H

$6 \times \Delta$



$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aria Δ echi

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$|H| = 6 \times \Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Deci R minimizează aria între formele de lărgime 1.

Cap 7 Yaglom Boltjanskii
încă 2 demonstrații:

[Dem aceasta: Chakerian]