Cursul 8. Existența soluțiilor. Mulțimi convexe. Constrângeri de lungime și diametru.

Referință: [Bogosel, Antunes, Parametric shape optimization among convex sets]

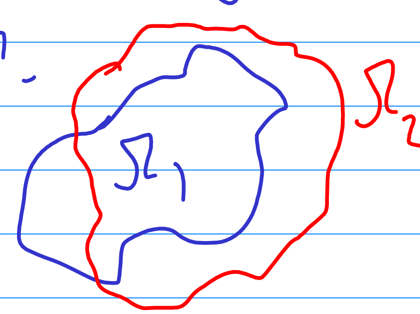
Pentru a face analiză în $\mathbb{R}$ avem nevoie să definim convergența șirurilor:

$x_n \to x$ dacă $|x_n - x| \to 0$

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ a.î. $\forall n \geq n_0$
$|x_n - x| < \varepsilon)$

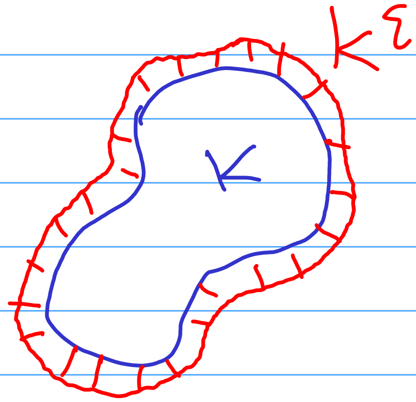
Pt a face analiză pe "spațiul formelor" avem nevoie de o noțiune de convergență sau distanță pe spațiul formelor.

$d(\Omega_1, \Omega_2) = ?$

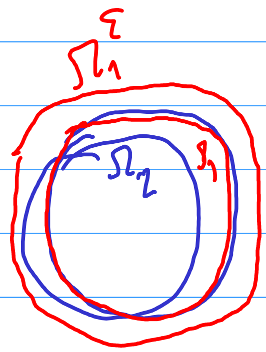


Distanța Hausdorff: Ω_1, Ω_2 compacte

Pt $\varepsilon > 0$ notăm $K^\varepsilon = \{x : d(x, K) \leq \varepsilon\}$



$$d^H(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ a.î. } \Omega_1 \subset \Omega_2^\varepsilon,\ \Omega_2 \subset \Omega_1^\varepsilon\}$$



$d^H(\Omega_1, \Omega_2)$ mic $\Rightarrow$ Ω_1 este "aproape" de Ω_2

Convergența formelor în distanța Hausdorff:

$(\Omega_n) \to \Omega \iff d^H(\Omega_n, \Omega) \to 0$

(compacte)

Proprietăți:

1. Teorema de selecție a lui Blaschke

Dacă (K_m) este un șir de forme compacte conținute într-o mulțime mărginită atunci există un subșir (K_{m_k}) care converge în dist. Hausdorff:

$$(K_{m_k}) \xrightarrow{H} K$$

Analog în $\mathbb{R}$: (x_m) mărginit $\Rightarrow \exists\, x_{m_k}$ a.î. x_{m_k} converge

Demonstrația: bazată pe thm Ascoli-Arzela.

Utilitate: $\min\limits_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$

$\mathcal{A} = \{ \Omega :$ compactă, $\Omega \subset B \}$

bilă mărginită

Dacă $\inf J \in \mathbb{R}$

Dacă J continuă pt convergența Hausdorff $\Rightarrow$ avem existența unei soluții.

Demonstrație:

a) alegem un șir minimizant

$\Omega_n \in \mathcal{A}$ a.î. $J(\Omega_n) \to \inf\limits_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$

b) $\left.\begin{array}{l}(\Omega_n) \subset B \\ \text{compact}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega^* \in \mathcal{A}$

c) J continuă pt conv Hausdorff

$J(\Omega_{n_k}) \to J(\Omega^*)$

$\to \inf\limits_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$

Din unicitatea limitei

$J(\Omega^*) = \inf\limits_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$

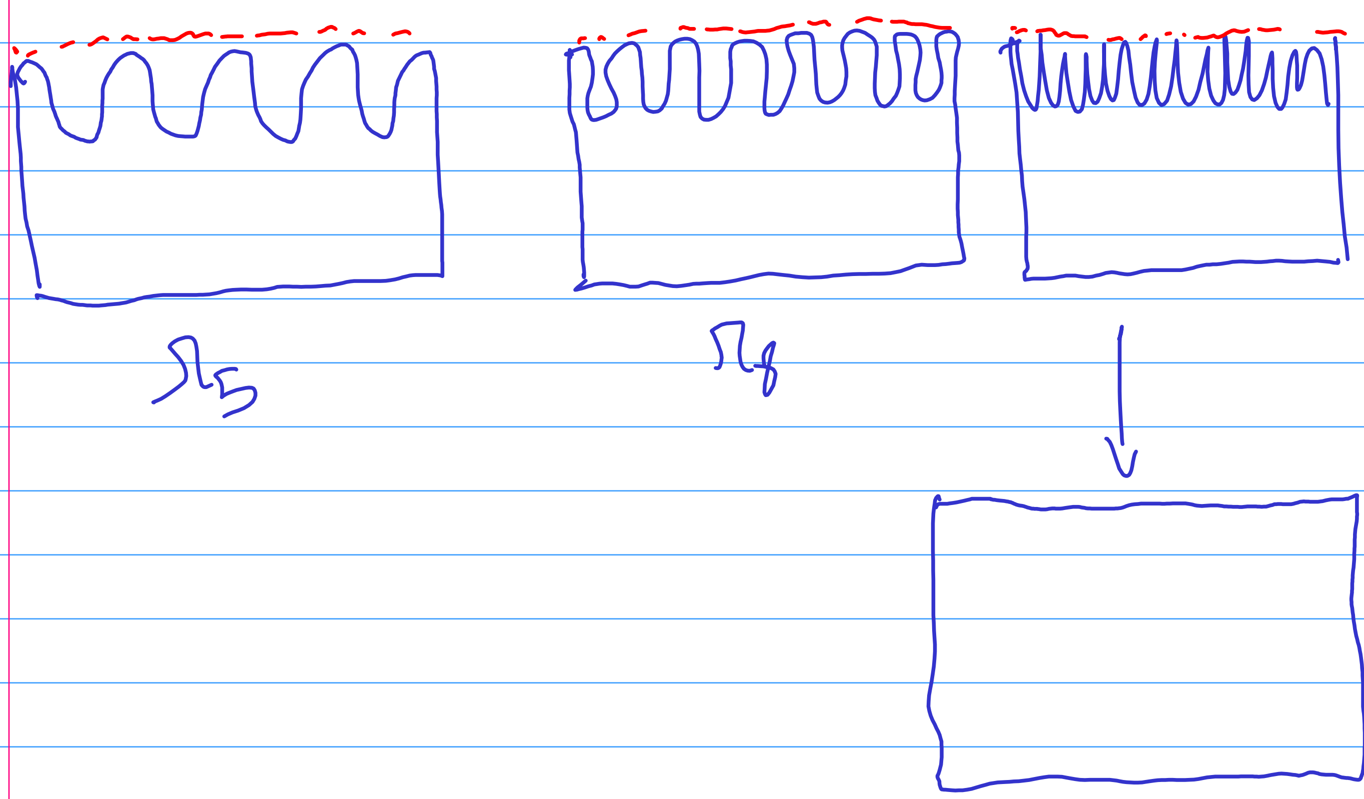
Același rezultat este valabil pt

- $\mathcal{A}$ închisă în top cu conv Hausdorff

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega \\ (\Omega_n) \subset \mathcal{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$$

- J continuă pt conv Hausdorff

Problema $\min\limits_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$ admite soluții.



Presupunem că lucrăm cu forme convexe, compacte conținute într-o bilă B fixată.

Proprietăți:

2. $$\left.\begin{array}{l} K_n \xrightarrow{H} K \\ K_n \text{ convexe} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{K \text{ convexă}}$$

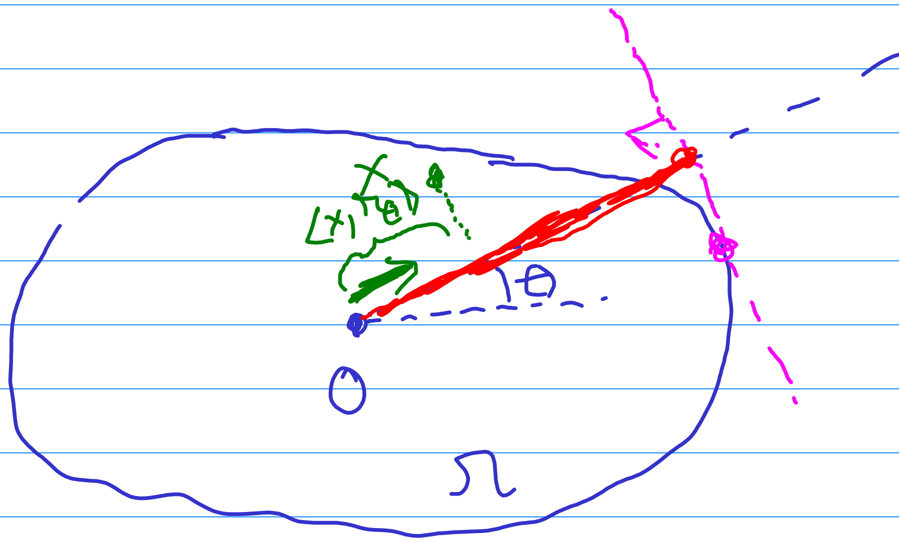
3. $$\left.\begin{array}{l} K_n \xrightarrow{H} K \\ A \subset K_n \ \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset K$$

4. Aria și perimetrul sunt continue (în clasa convexelor)

$$\left.\begin{array}{l} K_n \xrightarrow{H} K \\ K_n \text{ convexe} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |K_n| \to |K| \\ Per(K_n) \to Per(K) \end{array}$$

Funcția suport a unui convex

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω compactă convexă



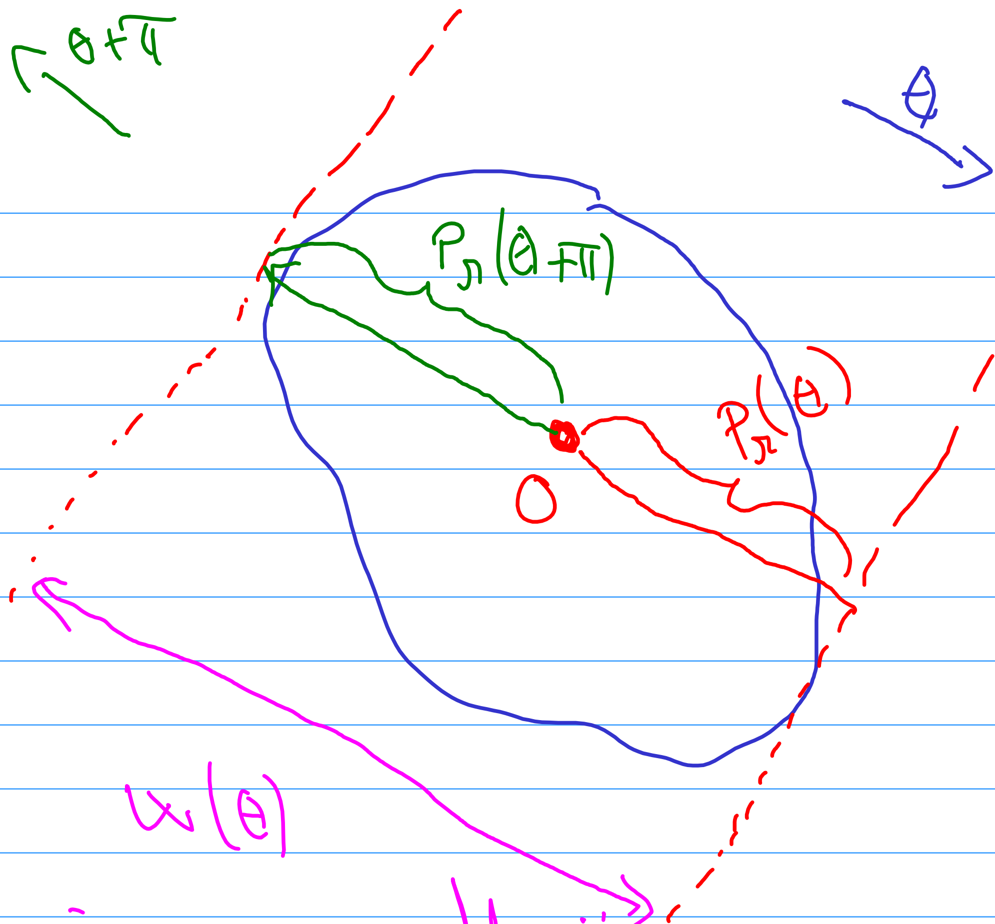
$$p_\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_+$$

$p_\Omega(\theta)$ = dist (O, tangenta la Ω ortogonală în direcția θ)

$$p_\Omega(\theta) = \sup_{x \in \Omega} \left\langle x, \underset{\pi_\theta}{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Lărgimea unei forme în direcția θ

$$w(\theta) = p(\theta) + p(\theta + \pi)$$



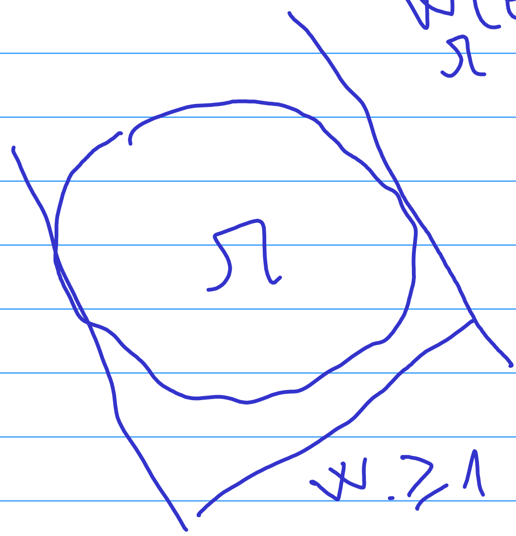
lărgimea mulțimii în direcția θ.

Proprietatea 5: $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ este echivalent cu $p_{\Omega_n} \longrightarrow p_\Omega$ uniform.

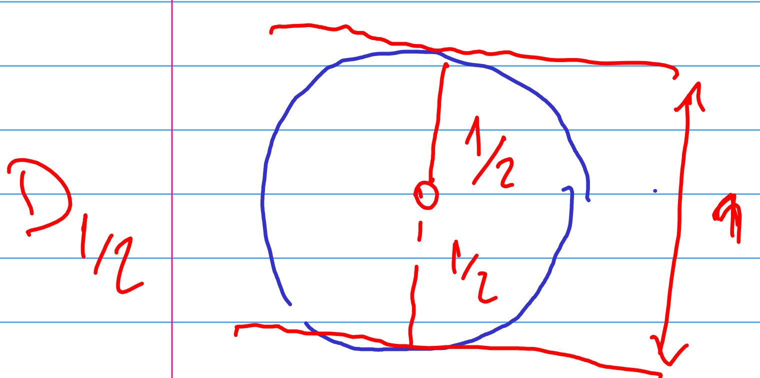
- lărgimea într-o direcție dată este continuă pt conv Hausdorff.
- Diametrul: $diam(\Omega) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} w(\theta)$

Diametrul este continuu pt conv Hausdorff.

$$\mathcal{A}_{mw} = \left\{ \Omega \text{ convexe a.î. } w_\Omega(\theta) \geq 1 \ \forall \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$



$$\mathcal{A}_{cw} = \left\{ \Omega \text{ convexe a.î. } w_\Omega(\theta) = 1 \ \forall \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$



$D_{1/2} \in \mathcal{A}_{cw}$

∃ multe alte forme de "lățime constantă"

Proprietate: $\mathcal{A}_{mw}$, $\mathcal{A}_{cw}$ sunt închise pentru convergența Hausdorff.

Dem: • $(\Omega_m) \subset \mathcal{A}_{mw}$, $\Omega_m \xrightarrow{H} \Omega$

$\Rightarrow$ $w_{\Omega_m}(\theta) \geq 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

continuitatea lungimii pt conv Hausdorff

$\Big\downarrow n \to \infty$

$w_{\Omega}(\theta) \geq 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_{mw}$.

• $(\Omega_m) \subset \mathcal{A}_{cw}$, $\Omega_m \xrightarrow{H} \Omega$

$\Rightarrow$ $w_{\Omega_m}(\theta) = 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

continuitatea lungimii pt conv Hausdorff

$\Big\downarrow n \to \infty$

$w_{\Omega}(\theta) = 1$

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_{cw}$

$\blacksquare$

Teoremă: Problemele:

- $\min\limits_{\Omega \in \mathcal{A}_{mw}} |\Omega|$
- $\min\limits_{\Omega \in \mathcal{A}_{cw}} |\Omega|$

admit soluții.

Demonstrație: decurge din:

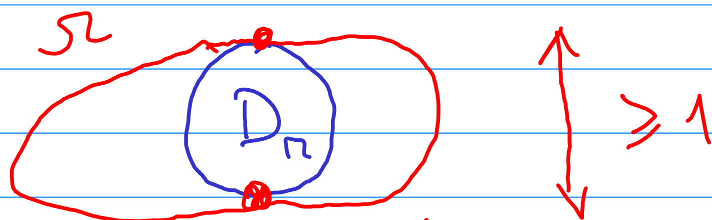
- $\mathcal{A}_{mw}$, $\mathcal{A}_{cw}$ închise pt conv Hausdorff
- aria este continuă pt conv Hausdorff.

Question: Care sunt formele care rezolvă problemele de mai sus?

Teorema 1: Soluția problemei $\min_{\Omega \in \mathcal{A}_{mw}} |\Omega|$ este triunghiul echilateral.

Dem: Fie $\Omega \in \mathcal{A}_{mw}$, $w_\Omega(\theta) \geq 1$ $\forall \theta \in [0, 2\pi]$

Fie D_r cel mai mare disc conținut în Ω.

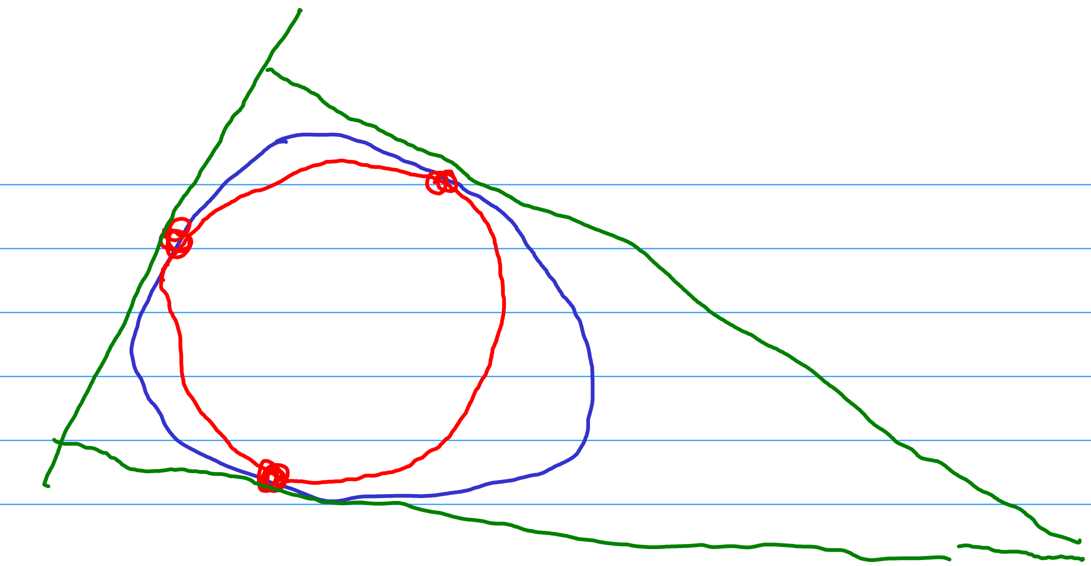
a) 

2 puncte de tangență diametral opuse

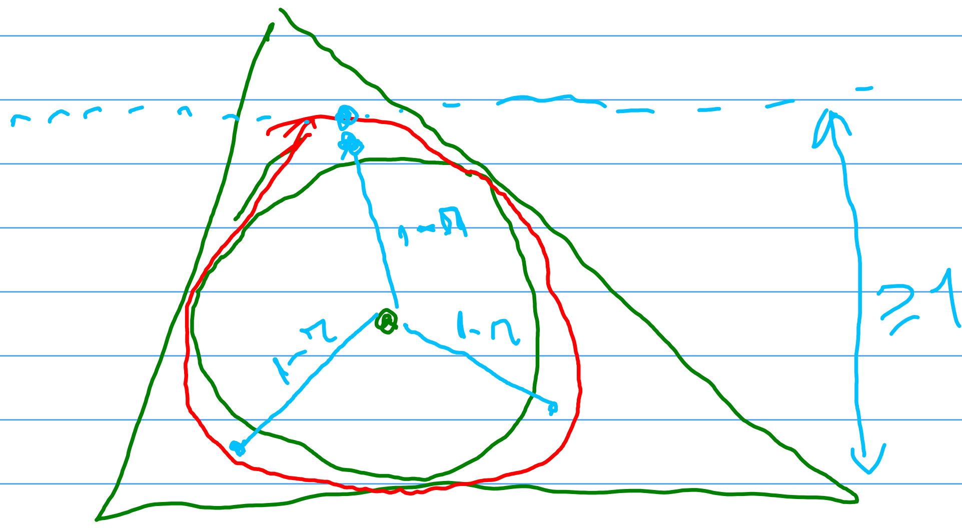
$\Rightarrow 2r \geq 1 \Rightarrow r \geq \frac{1}{2}$

Mai mult $|\Omega| \geq |D_r| \geq |D_{1/2}|$

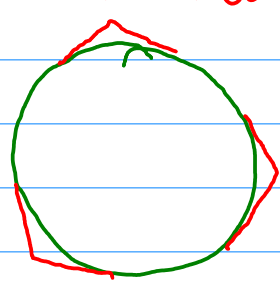
b) $\exists$ 3 puncte de tangență



- desenăm 3 tangente comune la Ω și D_r



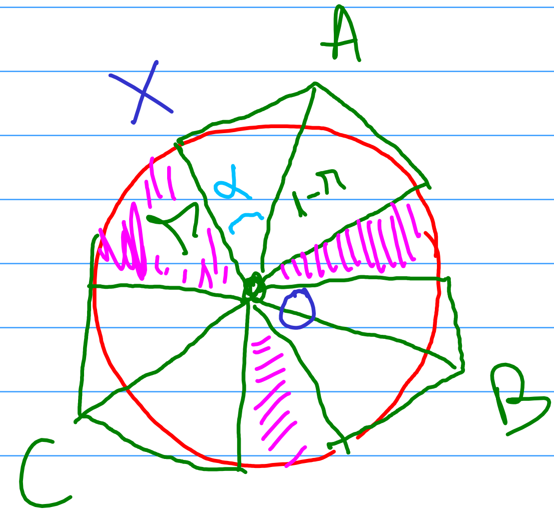
$\Rightarrow \Omega$ conține o formă de tipul anvelopa convexă a lui D_r și 3 puncte A, B, C la dist $1-r$ de centru.

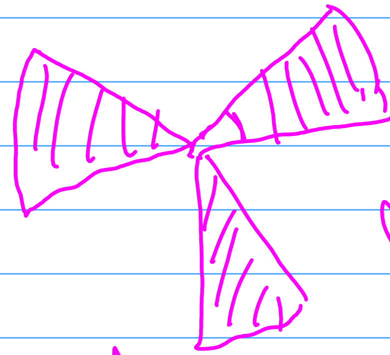


$T_{A,B,C}$

$\Rightarrow |\Omega| \geq |T_{A,B,C}|$

$\alpha = \sphericalangle AOX$



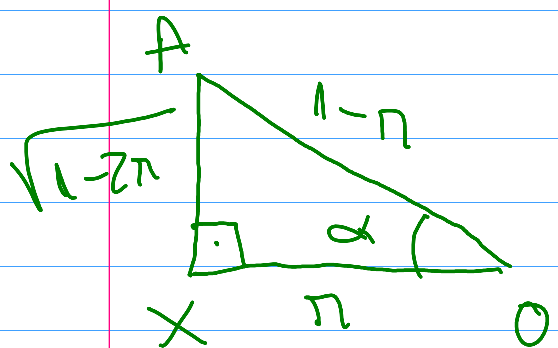


depinde de suma unghiurilor la centru.

Aria cercului $= \pi r^2$

Σ unghiuri $= 2\pi - 6\alpha$

$$|T_{ABC}| = 6\,|\Delta AOX| + \frac{2\pi - 6\alpha}{2}\cdot r^2$$



$$\cos\alpha = \frac{r}{1-r} \Rightarrow \arccos\frac{r}{1-r}$$

$$AX = \sqrt{AO^2 - XO^2} = \sqrt{(1-r)^2 - r^2} = \sqrt{1-2r}$$

$$\Rightarrow |\Delta AOX| = \frac{r\sqrt{1-2r}}{2}$$

$$\Rightarrow |T_{ABC}| = 6\cdot\frac{r\sqrt{1-2r}}{2} + \left(\pi - 3\arccos\frac{r}{1-r}\right)r^2$$

$r \longmapsto |T_{ABC}|$ explicită

Trebuie să studiem această funcție pe $[1/3, 1/2]$ (Yaglom - Boltjanskii "Convex figures")

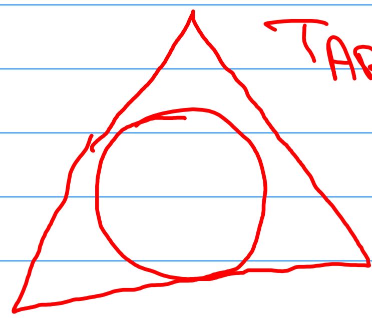
T_{ABC} cresc împreună cu r

$\Rightarrow$ $\underline{|T_{ABC}|}$ minimală pt $r = 1/3$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r}{1-r}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow T_{ABC}$ triunghi echilateral



- Fiecare formă $r \in \mathcal{F}_{max}$ conține
- formă de tipul $T_{A,B,C}$
- Formele $T_{A,B,C}$ au aria mai

mare decât Δ echilateral

$\Rightarrow$ $|S| \geq |\Delta$ echilateral de lungime $1|$

$\blacksquare$