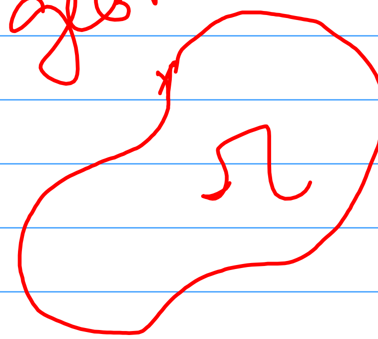
Optimizarea formelor. Curs 1

obiectele sunt forme geometrice



Selecție a unui obiect ce minimizează sau maximizează un cost (o funcție)

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$$

Dacă $x = -1$

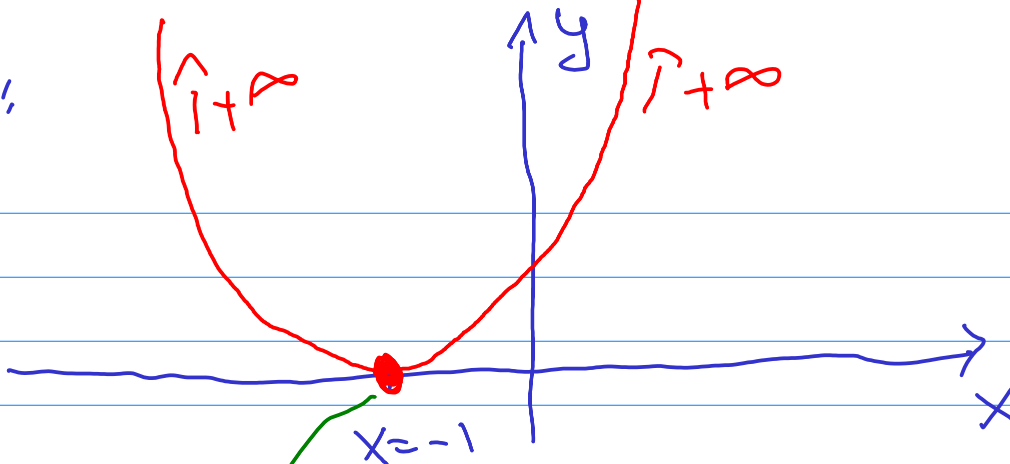
$$f(-1) = 0$$

Concluzie: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geq f(-1) = 0$

(Pb) minimizăm $f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$

$$\iff \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

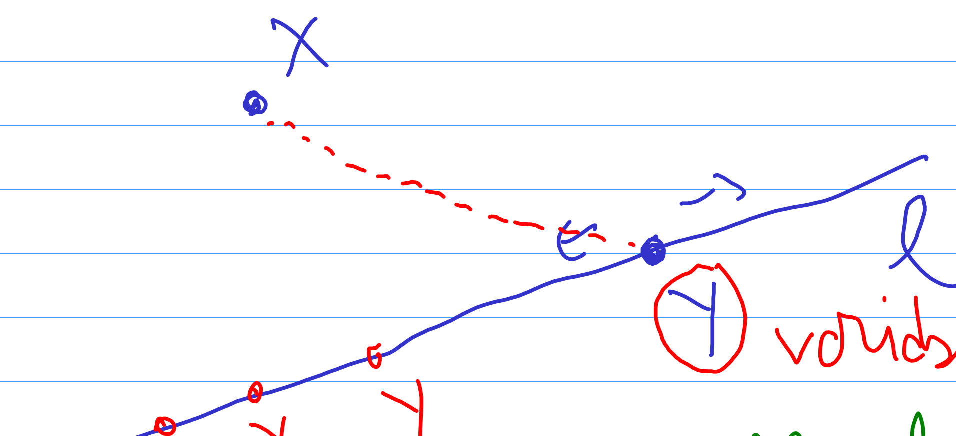
Grafic:



→ Soluția problemei de optimizare

Optimizare
→ minimizăm
→ maximizăm

Exemplu de problemă de opt. geometrică



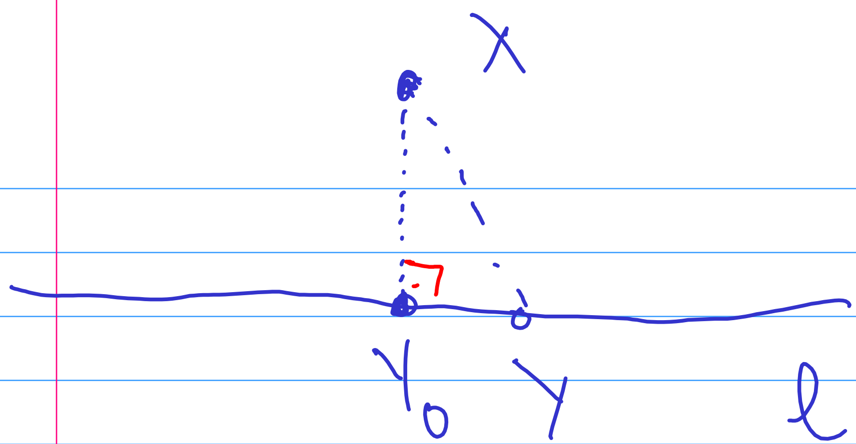
Y variabila problemei

AB = lungimea segm. [AB]

$Y \in l$

$$\min_{Y \in l} XY$$

$Y \in l$ → variabila + condiția verificată



Y_0: proiecția lui X pe ℓ.

$\min\limits_{Y \in \ell} XY$: $\boxed{\text{Soluția} = Y_0}$

Cum demonstrăm:

Dacă $Y \in \ell$, $Y_0 \in \ell$, $Y_0X \perp \ell$

$\Rightarrow \Delta XY_0Y$ este dreptunghic, lungimea ipotenuzei $\geq$ lungimea unei catete

$\Rightarrow XY \geq XY_0 \quad \forall Y \in \ell$

Deci XY_0 este distanța minimă de la X la un punct $Y \in \ell$.

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$$

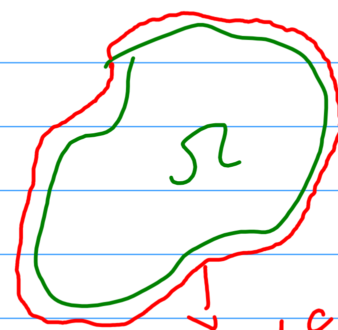
$\Omega \in \mathcal{A}$ → forme admisibile

ex: triunghiuri
patrulatere
elipse
etc.

$J(\Omega)$ → funcția obiectiv

- aria

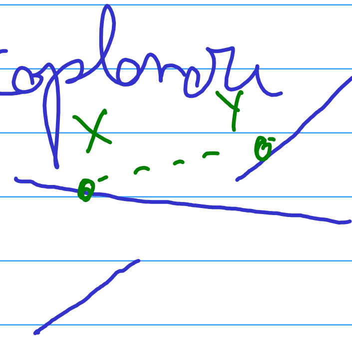
- perimetrul



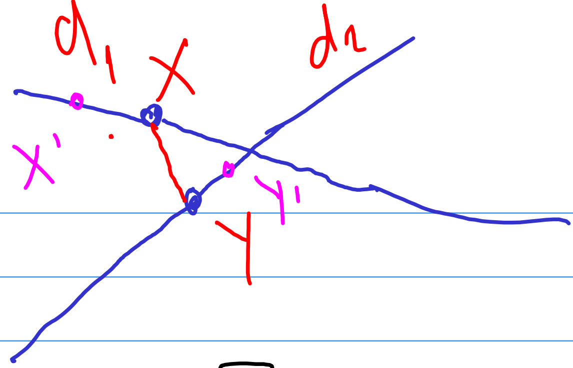
lungimea frontierei

- diametrul

Exemplu: 2 drepte necoplanare
d_1, d_2.



$$\min_{X \in d_1,\, Y \in d_2} XY$$

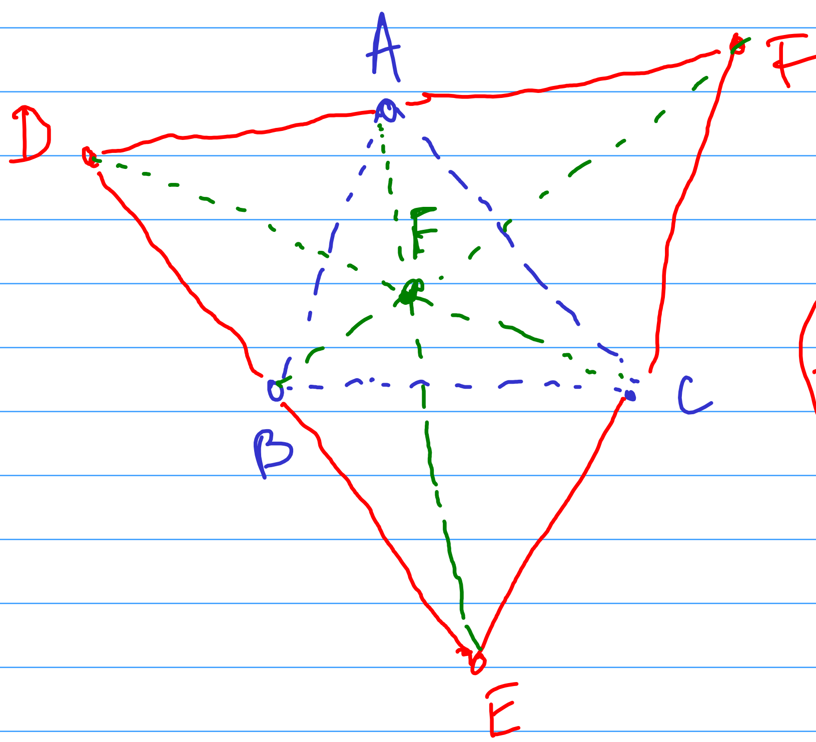


Sol: perpendiculara comună a celor 2 drepte.

$$\begin{cases} XY \text{ care verifică} \\ X \in d_1,\ Y \in d_2 \\ XY \perp d_1 \\ XY \perp d_2 \end{cases}$$

Punctul lui Fermat/Torricelli

ABC triunghi (toate unghiurile $< 120^\circ$)



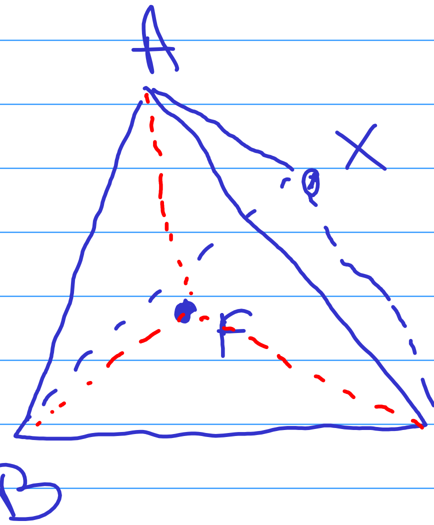
ΔABD
ΔBCE
ΔACF
- echilaterale

Proprietate: $AE \cap CD \cap BF \neq \emptyset$

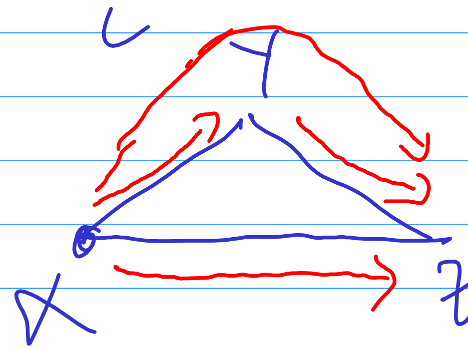
punctul de intersecție este punctul lui Fermat / Torricelli.

<u>Teoremă</u>: Punctul F este <u>soluția</u> problemei de minimizare

$$\min_{X \in \text{plan}} \left(\underline{XA + XB + XC}\right)$$



• <u>Inegalitatea triunghiului</u>



$$XY + YZ \geq XZ$$ continuum.

• În plan drumul de lungime minimală ce conectează 2 puncte este segmentul de dreaptă corespunzător.

$\ell(\gamma) \geq XZ$

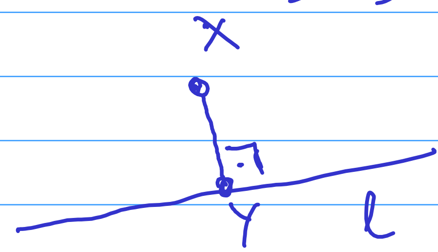
lungime

Până acum am "ghicit" soluția sau aceasta ne-a fost dată.

Ce proprietăți (condiții de optimalitate) verifică soluțiile pb de mai sus?

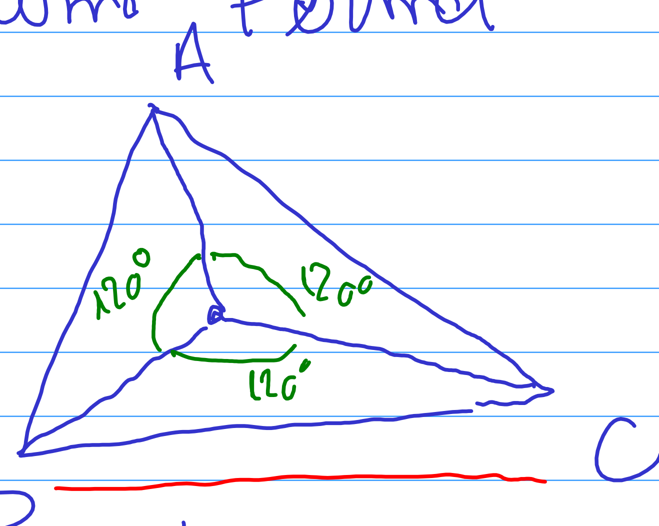
- dist min:

  $XY \perp \ell$



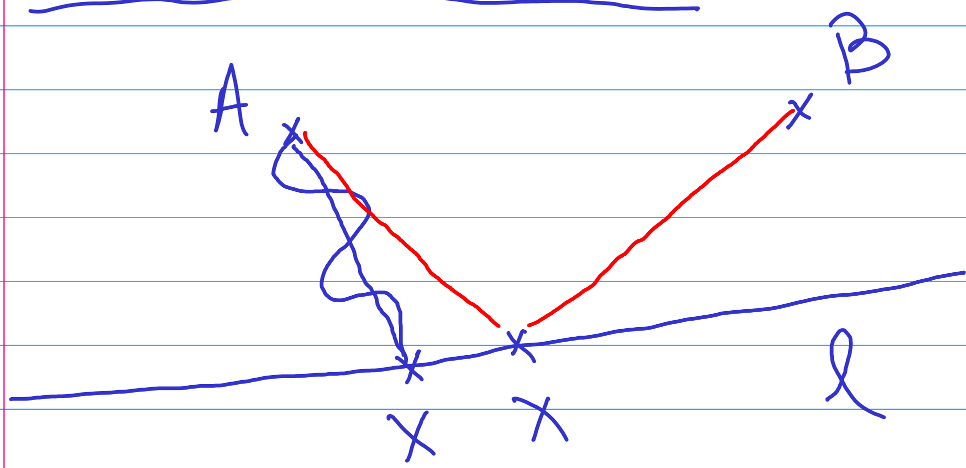
- dist între cele 2 drepte: $XY \perp d_1$, $XY \perp d_2$

- problema Fermat



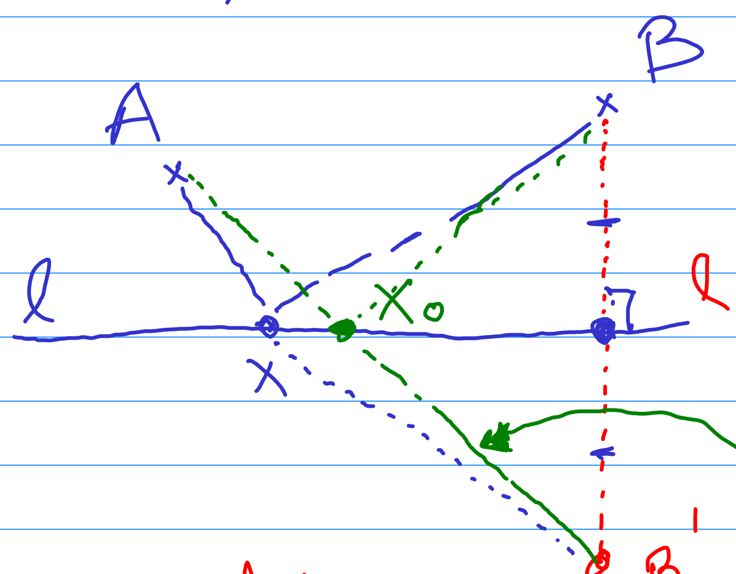
Thm Fermat: $x^* \in (a,b)$ care min $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabilă $\Rightarrow f'(x^*) = 0$

Problema lui Heron



$$\min_{X \in l} (XA + XB)$$

Soluții:



Fie B' simetricul lui B față de l

- mijlocul lui $BB' \in l$
- $BB' \perp l$

$\Rightarrow XB = XB' \Rightarrow XA + XB = XA + XB'$

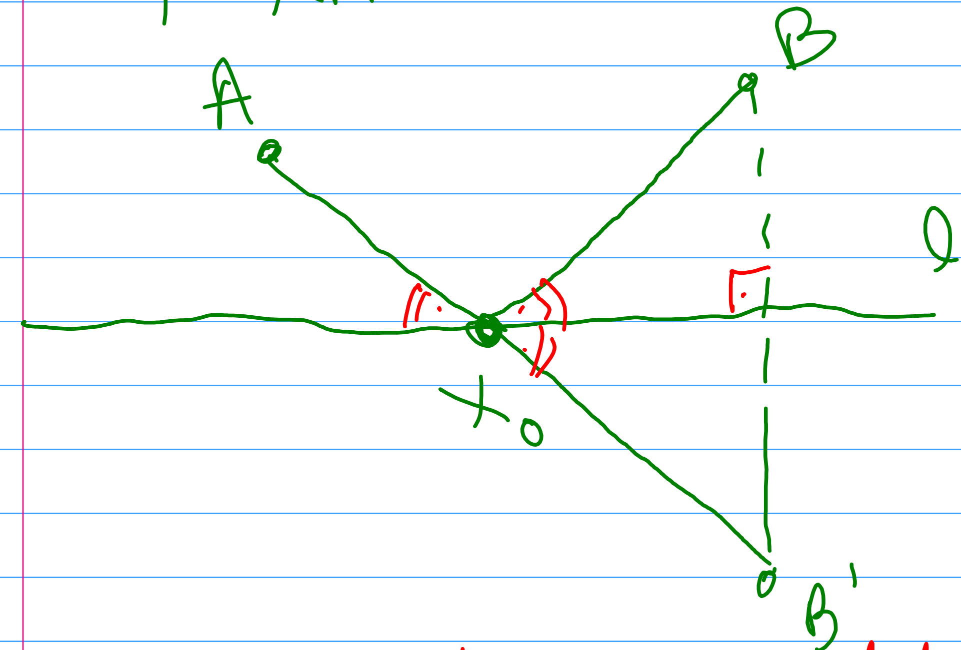
În $\Delta XAB' \Rightarrow XA + XB' \geq AB'$

Prin urmare $XA + XB \geq AB'$

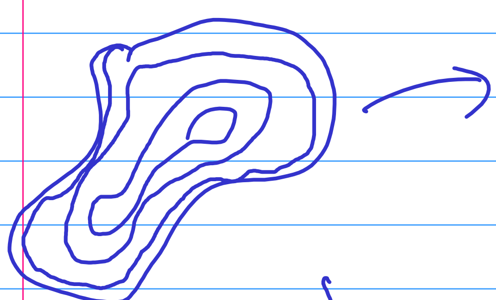
marginea inferioară

$X_0 = AB' \cap \ell$

$\Rightarrow XA + XB \geq AB' = X_0A + X_0B$

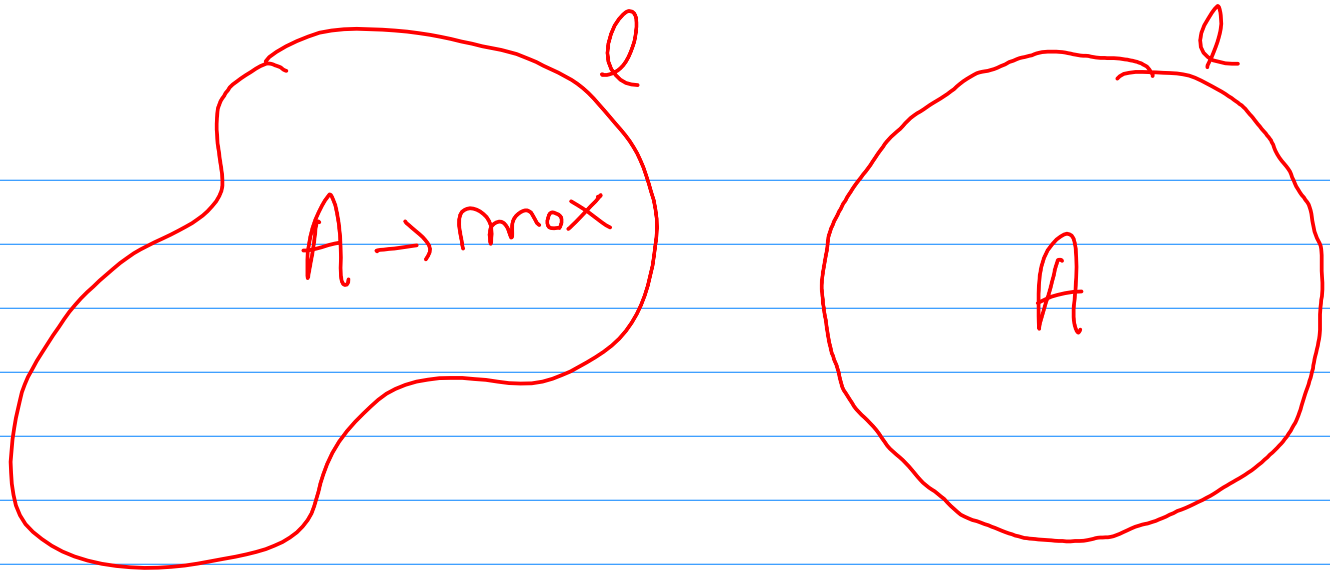


- soluția verifică proprietatea de reflecție!

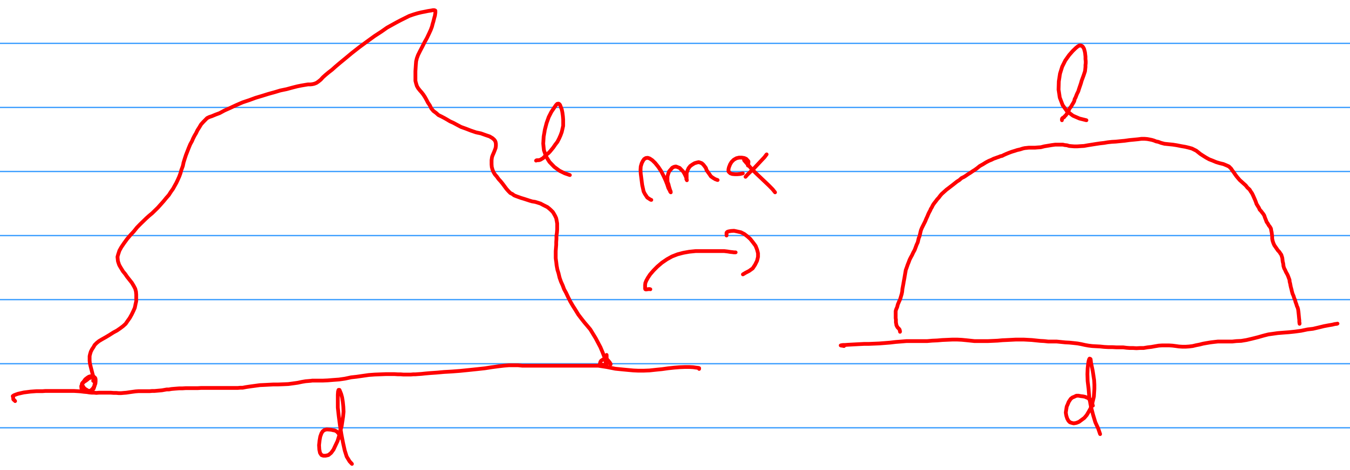


sfoară de lungime considerabilă.

Dacă avem o sfoară de lungime l care este aria maximală ce o putem înconjura cu această sfoară?



l
A → max
l
A



l
max
d
l
d