Subiecte proiect: Optimizarea Formelor 2025

Beniamin Bogosel

December 10, 2025

Instrucţiuni:

- Rezolvările se vor redacta si se vor trimite pe email la adresa `beniamin.bogosel@uav.ro`. Menţionaţi numele, prenumele, Proiect MMST in subiectul email-ului. Deadline-ul este o săptămână după finalizarea cursului.
- Cei care intenţionaţi să faceţi proiectul trebuie să mă anunţaţi. Ceilalţi vor da examen în mod obişnuit la data anunţată în sesiune.
- Pentru obţinerea unei note bune se aşteaptă ca rezolvările să fie redactate cu grijă şi riguros. Redactarea poate fi computerizată sau manuscrită (scan PDF cu condiţia ca scrisul să fie lizibil). Dacă aveţi dificultăţi cereţi referinţe şi puneţi întrebările corespunzătoare pe email sau în timpul cursurilor ce mai rămân.

Problema 1. Fie P un poligon cu n vârfuri având coordonatele $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$.
a) Să se calculeze perimetrul lui P în funcţie de coordonatele vârfurilor.
b) Să se calculeze aria lui P în funcţie de coordonatele vârfurilor
c) Se consideră problema de optimizare:

$$\min_{|P|=c} \operatorname{Per}(P).$$

Scrieţi condiţiile de optimalitate pentru această problemă.
d) Demonstraţi că soluţia problemei precedente este dată de poligonul regulat.

Problema 2. Fie T un triunghi cu laturile a, b, c cu aria S. Să se demonstreze că:
a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.
b) Să se demonstreze că $a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}S$. De ce această inegalitate este o îmbunătăţire a inegalităţii precedente?
c) Prezentaţi o demonstraţie grafică a inegalităţii de la punctul b) (hint: https://mathproblems123.wordpress.com/2022/06/05/weitzenbocks-inequality-graphical-proof/

Problema 3. Se notează cu R, r razele cercurilor circumscris şi, respectiv, înscris într-un triunghi.
a) Dacă $R > 0$ este fixat, care este perimetrul maxim al triunghiului? Care este aria maximă? Ce puteţi spune despre problema minimizării ariei şi perimetrului în acest context?
b) Dacă $r > 0$ este fixat, care este perimetrul minim al triunghiului? Care este aria minimă? Ce puteţi spune despre problema maximizării ariei şi perimetrului în acest context?

Problema 4. Descrieţi construcţia tetraedrelor lui Meissner şi prezentaţi cum se poate calcula aria şi volumul acestor corpuri.

[Bibliografie: https://arxiv.org/abs/2310.17672]

Problema 5. a) Demonstraţi că limita în sensul Hausdorff al unui şir de discuri cu razele r_n ce converg la un număr $r > 0$ şi centrele c_n ce converg la un punct c este discul $B(c, r)$.

b) Fie $\mathcal{E}_n$ un şir de elipse cu centrele x_n si semi-axele a_n, b_n. Presupunem că $x_n \to x$, $a_n \to a > 0$, $b_n \to b > 0$. Demonstraţi că $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}$ în sensul Hausdorff, unde $\mathcal{E}$ este elipsa centrată în x cu semi-axele a, b.

Problema 6. Se consideră $\mathcal{F}$ o funcţională de forme continuă pentru convergenţa Hausdorff $(\Omega_n \to \Omega \implies \mathcal{F}(\Omega_n) \to \mathcal{F}(\Omega))$. Notăm cu $\mathcal{A}$ clasa formelor convexe în $\mathbb{R}^2$ conţinute într-un disc D de rază $R > 0$ fixată.

a) Fie $(\Omega_n) \subset \mathcal{A}$ un şir de forme convexe. Care rezultat ne permite să afirmăm că Ω_n conţine subşiruri convergente?

b) Fie $(\Omega_n) \subset \mathcal{A}$ un şir de forme convexe ce converge la Ω în sensul Hausdorff. Demonstraţi că Ω poate fi

- un punct
- un segment
- o formă convexă

Daţi un exemplu în fiecare dintre aceste cazuri.

c) Demonstraţi că problema
$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\Omega)$$
admite soluţii.

Problema 7. Prezentaţi demonstraţia teoremei Blaschke-Lebesgue folosind poligoane circumscrise cu $3 \cdot 2^n$ laturi. [Bibliografie: Yaglom-Boltjanskii, Capitolul 7].

Problema 8. Prezentaţi demonstraţia teoremei Blaschke-Lebesgue folosind volume mixte (definiţia şi proprietăţile volumelor mixte vor fi amintite). [Bibliografie: https://arxiv.org/abs/2311.14618]

Problema 9. Fiecare triunghi T admite o infinitate de elipse înscrise (tangente la fiecare dintre cele 3 laturi).

a) Demonstraţi că dacă X, Y, Z sunt punctele de tangenţă ale elipsei E pe laturile BC, CA, AB atunci AX, BY, CZ sunt concurente.

b) Demonstraţi reciproca lui a). Concluzionaţi că există o elipsă S (numită inelipsa lui Steiner) care este tangentă la laturile triunghiului în mijloacele acestora.

c) Demonstraţi că dintre toate elipsele înscrise în triunghiul dat, inelipsa lui Steiner maximizează aria.

[Bibliografie: https://beniamin-bogosel.github.io/pdfs/mardenthm.pdf]

Problema 10. O formă convexă K are lărgime minimală w dacă pentru orice pereche de tangente paralele distanţa dintre acestea este cel puţin w. Demonstraţi că printre toate formele având lărgime minimală 1, triunghiul echilateral are aria minimă. [Bibliografie: Yaglom-Boltjanskii, Capitolul 6]