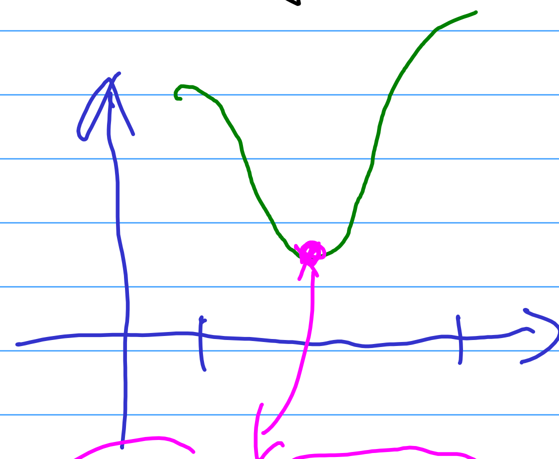
Tehnici Optimizare.

Optimizare în 1D: teorie + algoritmi

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$



<u>Teorie</u>: $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

obiectiv: găsirea punctului de minim

→ <u>Existența minimului</u>

→ f ctie continuă pe un compact

→ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă

"∞ la infinit": $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$

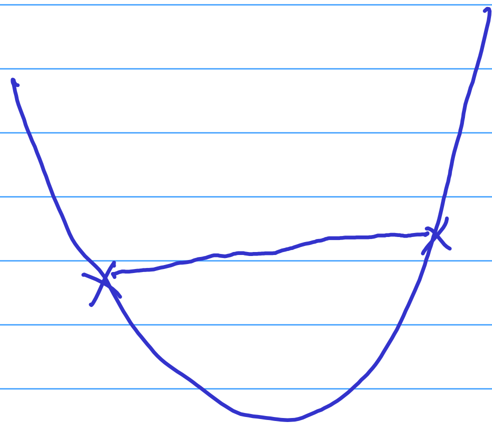
→ Proprietăți teoretice:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f derivabilă

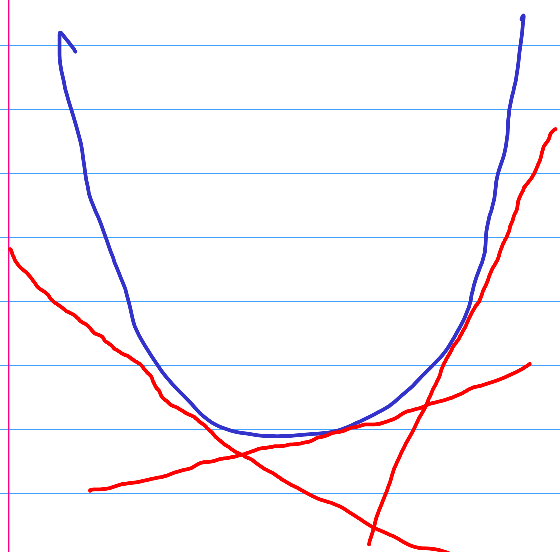
Dacă x^* realizează minimul lui f pe $[a,b]$ și $x^*\in(a,b)$ atunci

$\boxed{f'(x^*)=0}$ → condiție de optimalitate.

Cele care simplifică aspectele teoretice și practice: convexitatea



„segmentul ce leagă 2 puncte pe grafic este deasupra funcției în intervalul respectiv”

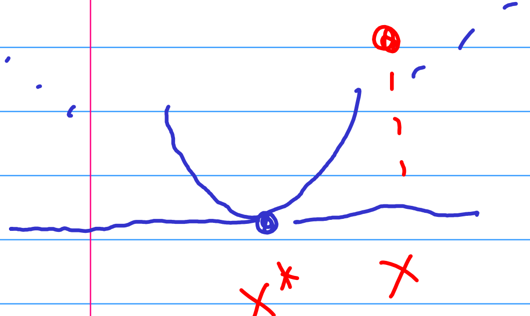


„funcția convexă este deasupra oricărei tangente”

f convexă, x^* min local $\Rightarrow$

→ f deasupra tangentei în x^* (orizontală)

→ $x \neq x^* \Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$



Funcții strict convexe:

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$$

- $\forall t \in (0,1)$
- $\forall x \neq y$

$\Rightarrow$ nu conțin segmente în grafic

f stă convexă, $x^* \to \min_{x \in D} f(x)$] minimul e unic

Dem: $x_1 \neq x_2$ sunt puncte de minim

x_1, x_2 pct de minim $\Rightarrow$ f este constantă pe $[x_1, x_2]$. Contradicție cu convexitatea strictă!

Convexitatea nu garantează existența minimului.

Contraexemplu: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\exp(x)$

→ $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$

→ $f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

→ f este str. convexă.

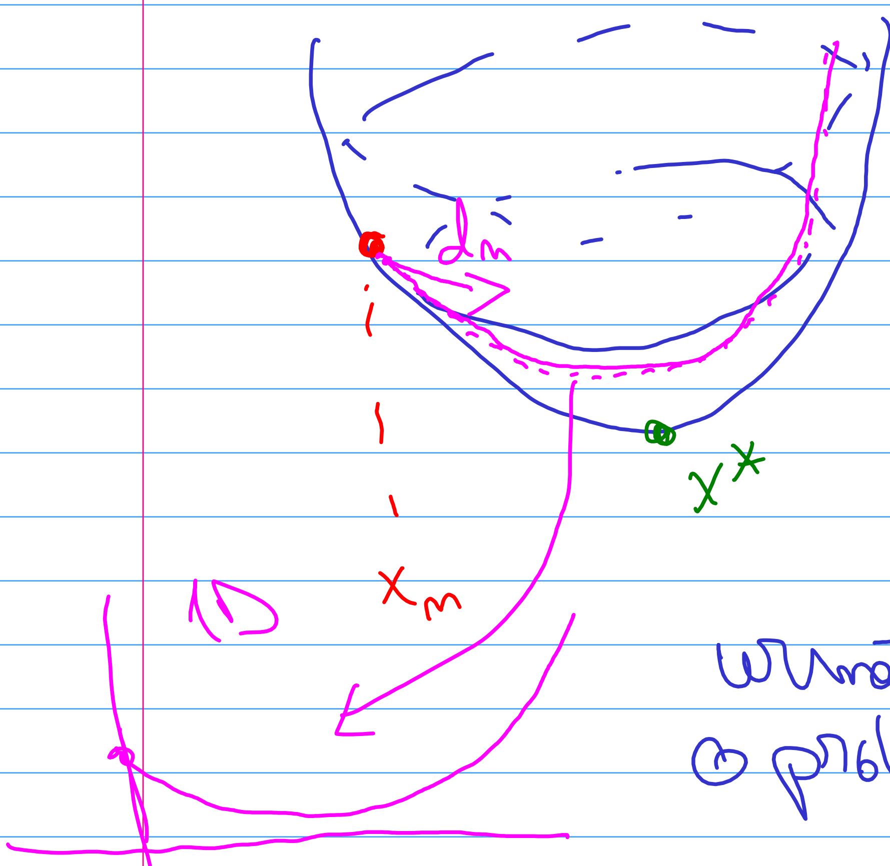
$t>0$

$t \mapsto x_m + t d_m$

→ $\varphi(t) = f(x_m + t d_m)$

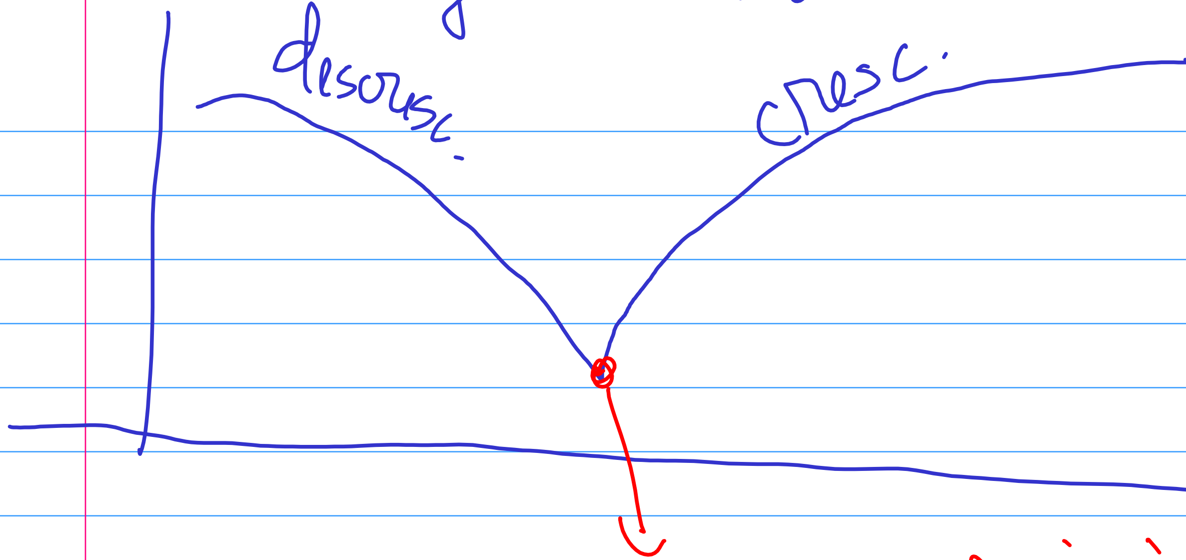
ficși

variabil



Pt găsirea punctului următor rezolvăm (aprox) o problemă 1D.

funcție unimodală



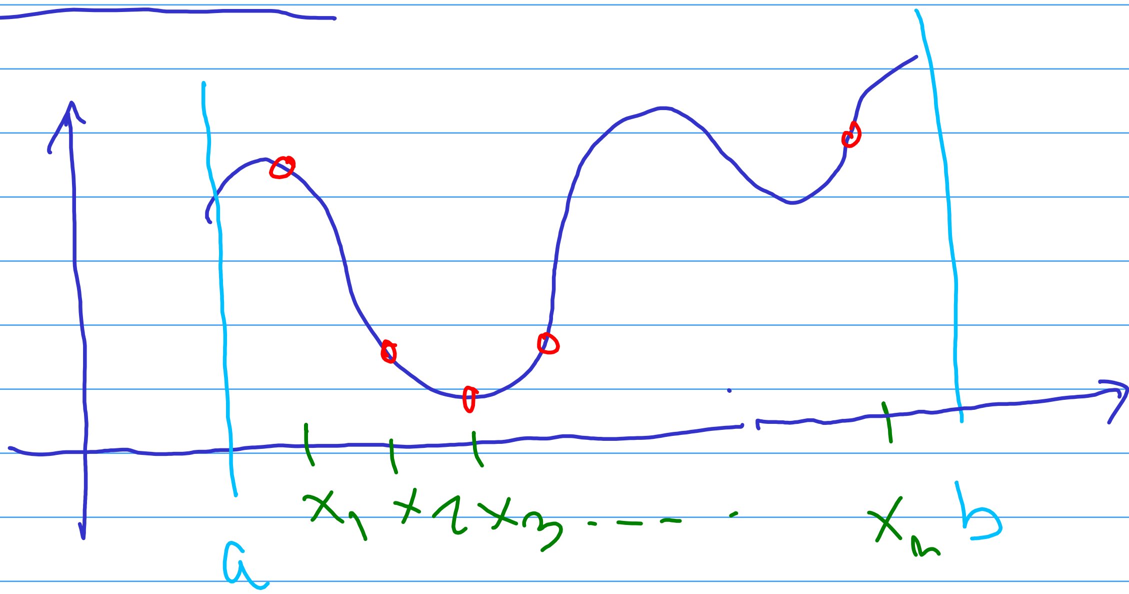
un singur minim local.

Algoritmi de optimizare
→ acces la valorile funcției
→ ordin 0
→ acces la derivatele de ordin k
→ ordin k

Obiectivul studiului
- analiza numerică
- optimizări numerice
- aproximări numerice.

Majoritatea problemelor ce le formulăm nu au soluție analitică (calculabilă teoretic)

Grid search

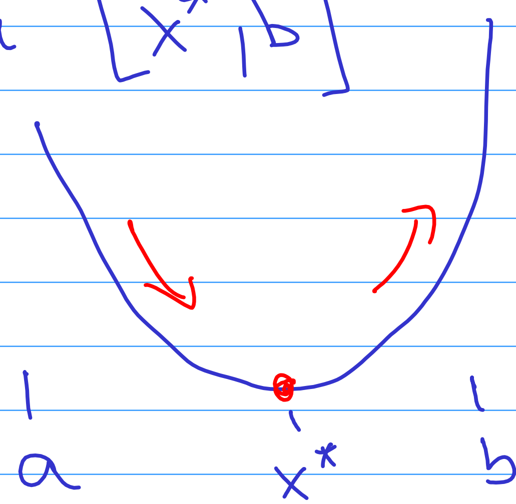


- Calculăm $f(x_i)$
- Selecționăm cea mai mică valoare.
- Explorează tot spațiul.
  - → avantaj: găsește min. global
  - → dezavantaj: nr. de evaluări este mare = N
    multe evaluări sunt inutile

Mai departe: Presupunem că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este unimodală.

f: descrescătoare pe $[a,x^*]$

f: crescătoare pe $[x^*,b]$



Scop: Determinarea lui x^*

Putem doar să calculăm valori ale funcției.

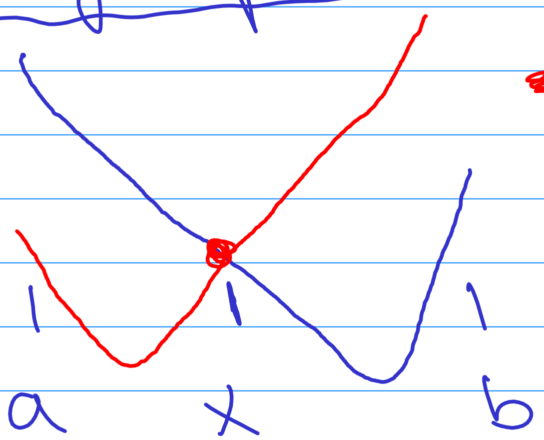
Alg de încadrare a minimului.

$x^* \in [a,b]$

- alegem unul sau mai multe pcte intermediare și calculăm valorile funcției

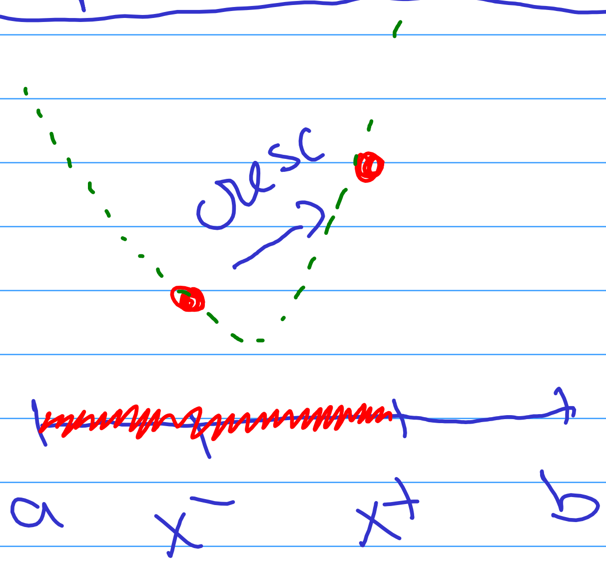
- reducem intervalul ce conține x^*

1 singur punct intermediar



Valoarea într-un punct intermediar nu indică dacă minimul este înainte sau după.

2 puncte intermediare:



Cazul 1 $f(x^-) \le f(x^+)$

- f este unimodală.

$\Rightarrow$ minimul este înainte de x^+

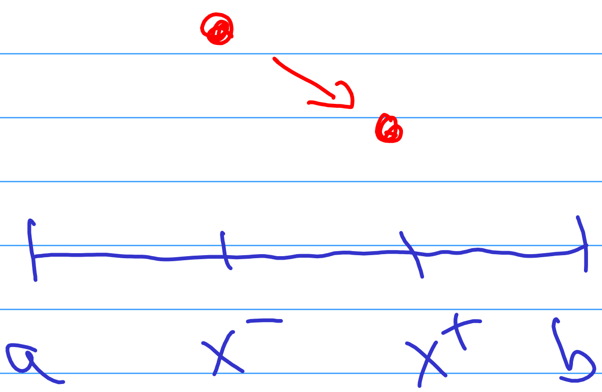
$\rightarrow$ funcția nu poate să descrească după x^+

$\Rightarrow x^* \in [a, x^+]$

Cazul 2

$f(x_-) \geq f(x_+)$

- minimul este după x^-



$\Rightarrow x^* \in [x^-, b]$

Algoritm: x_n generat de algoritm.

Soluția: x^*

$r_i = |x_n - x^*|$ eroarea la iterația nr. i

Scop: i) $r_i \to 0$ $i \to +\infty$

ii) Cât de rapid tinde r_i la 0

conv liniară

Conv. liniară: dacă $\boxed{r_{i+1} \leq q\, r_i}$

$q \in (0,1)$

$r_i \leq q^n r_0 \to 0$

$q = 0{,}99$

În câte iterații reducem eroarea de 100 de ori. $\gtrsim 450$ iterații