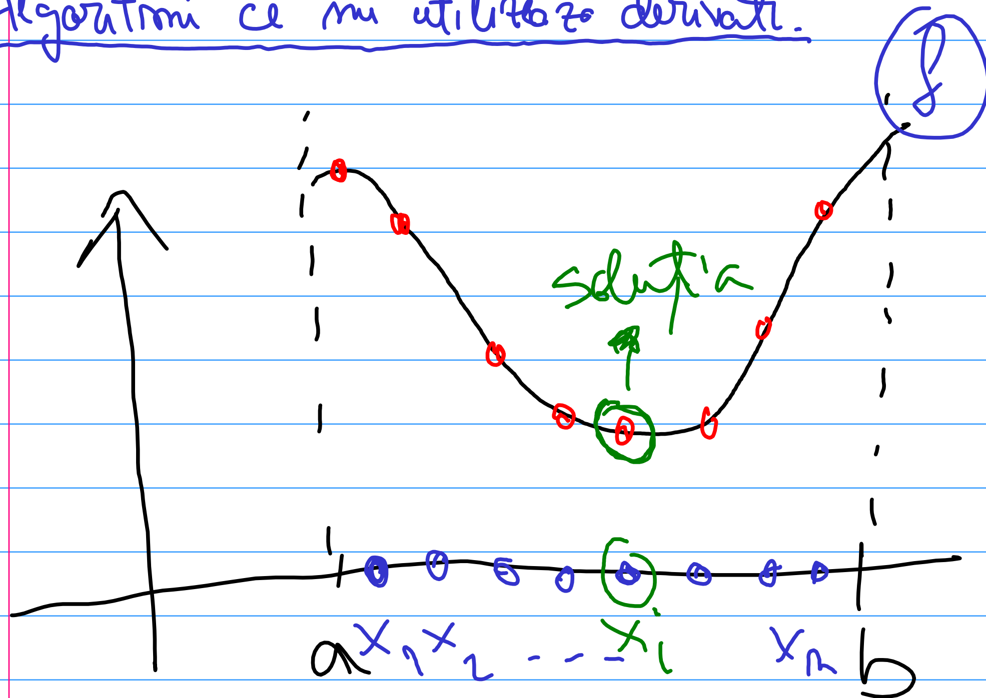
Curs 4: Optimizare în 1D

Algoritmi ce nu utilizează derivate.



→ discretizăm $[a,b]$

→ $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ (- uniformă
- aleatorie

→ Evaluăm $f(x_1), \dots, f(x_n)$

→ alegem valoarea cea mai mică

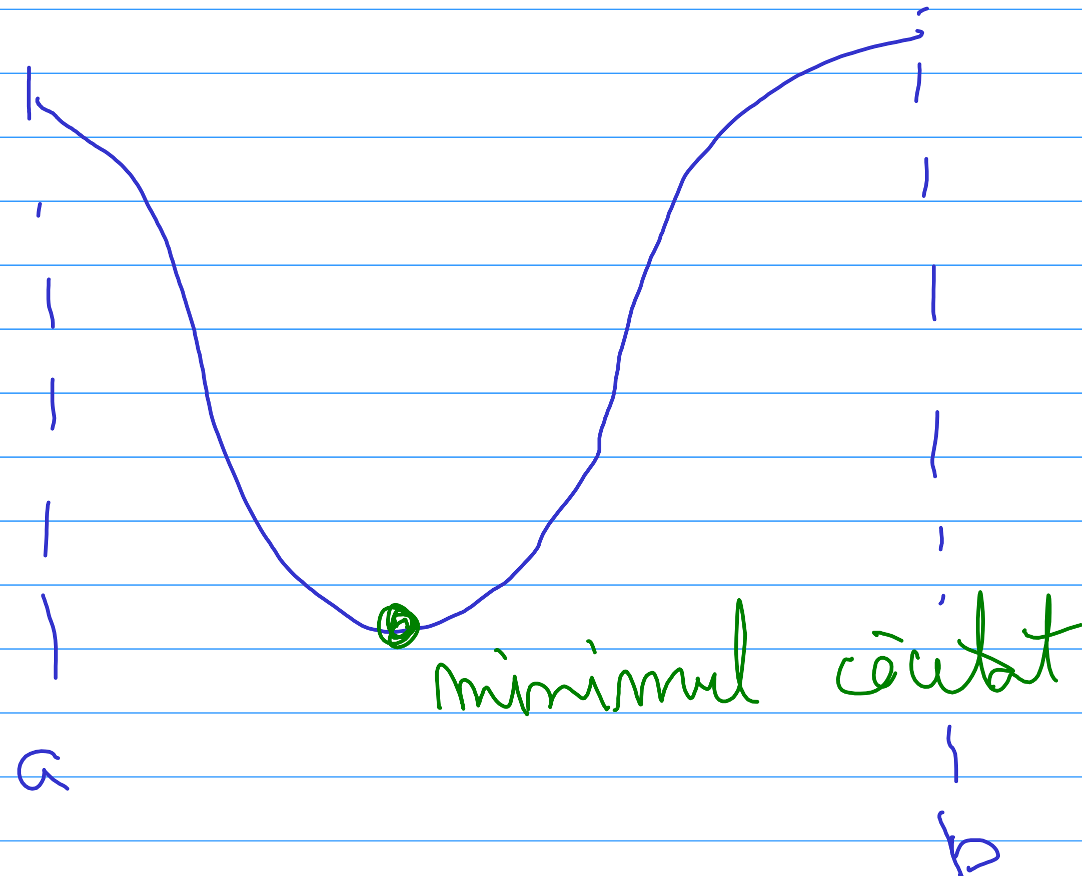
Inconvenient: Soluția depinde de discretizare

- discretizare mai fină ⇒ aprox mai bună
- Costul algoritmului: $n \times$ (eval lui f)

Aplicație: reprezentare grafică a unei funcții.

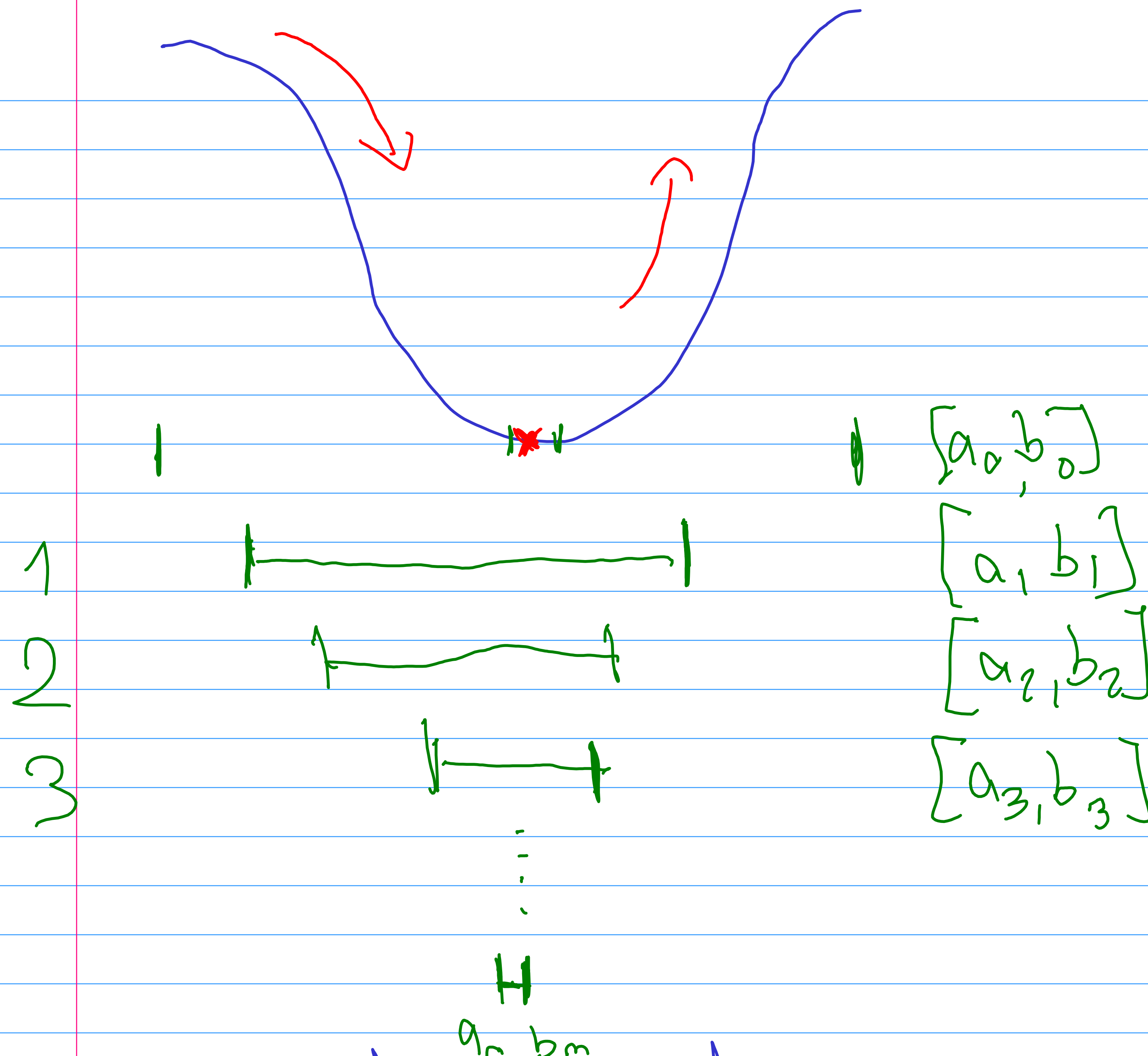
Avantaje: – vom găsi chiar aproximări ale minimului global

Funcții <u>unimodale</u>



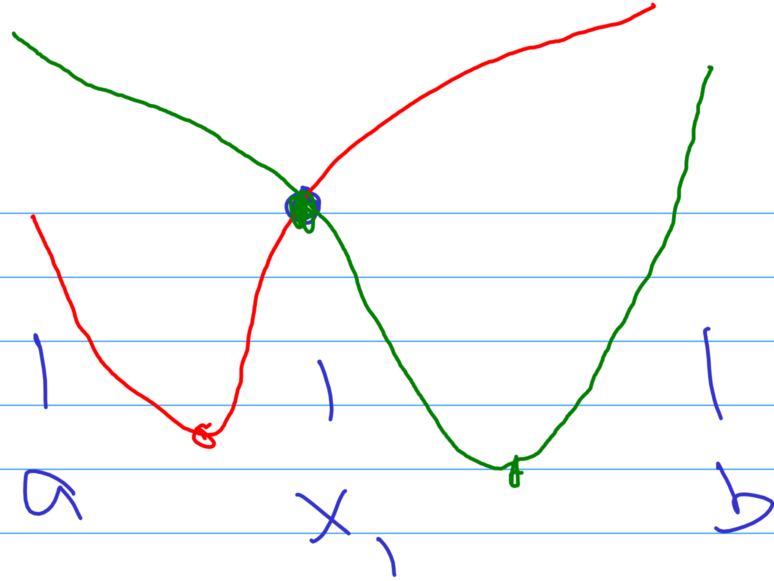
- Init: $I = [a,b]$ → intervalul în care găsim soluția

- <u>Obiectivul:</u> la iterația nr i vom AMELIORA intervalul de aproximare $[a_n, b_n] \to [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mai "mic"



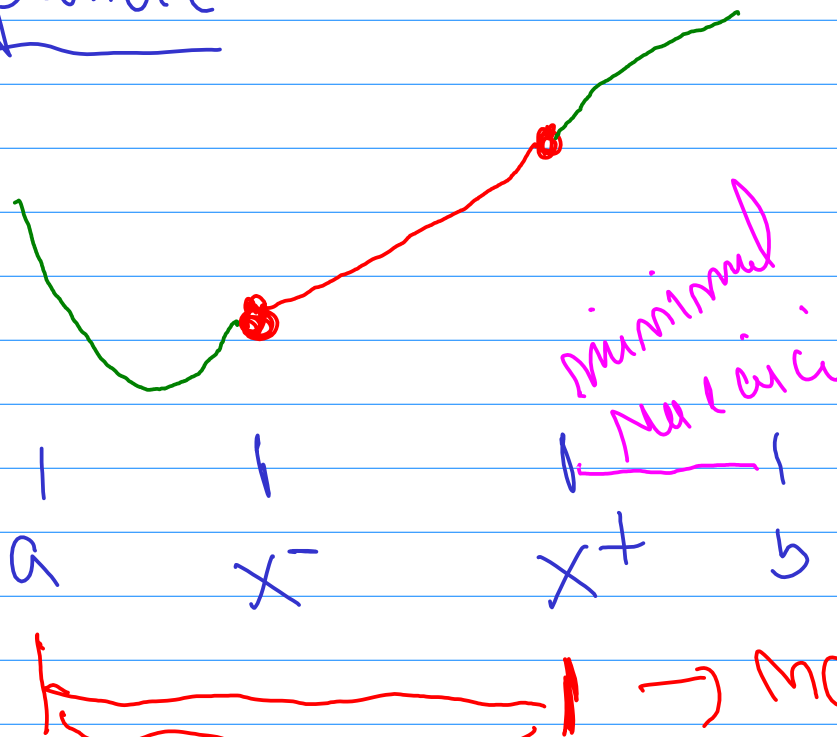
Alegem puncte intermediare în care să evaluăm funcția.

<u>1 punct</u>: Nu știm să reducem intervalul



2 puncte

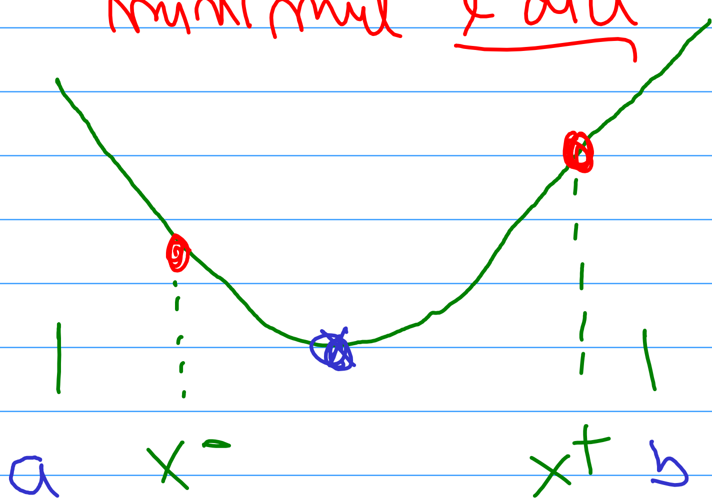
unimodale ↘↗



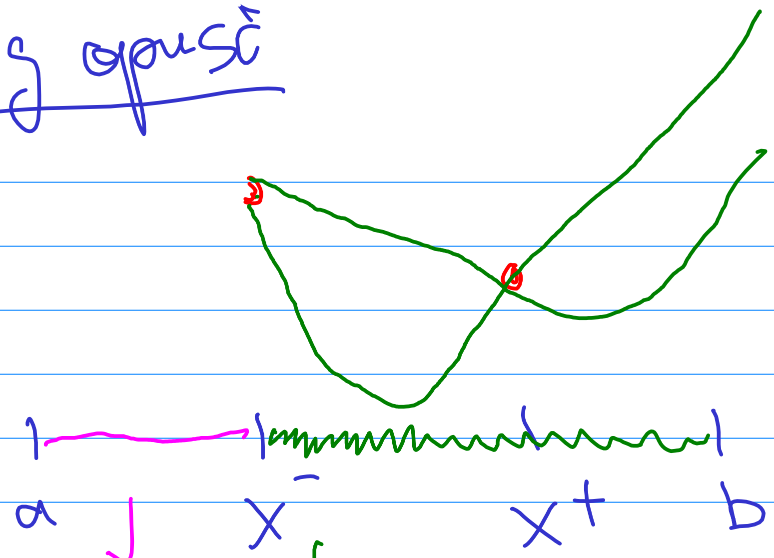
$$f(x^-) \le f(x^+)$$

→ noul interval $[a, x^+]$

minimul e aici



Imag opusă



$f(x^-) \geq f(x^+)$

minimul nu este aici

minimul este în $[x^-, b]$

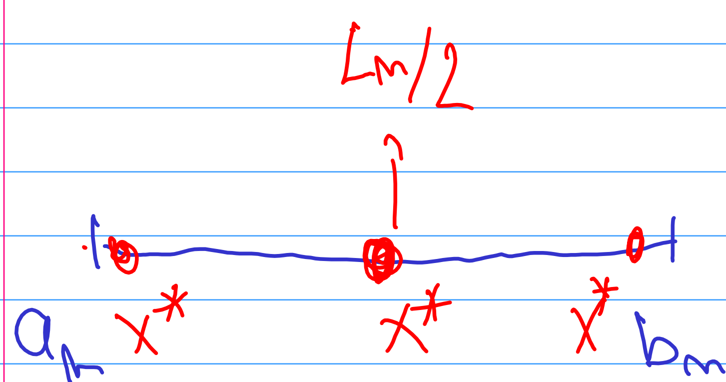
Algoritmul slide 17

Invariantul "de buclă" este

soluție $\in [a_n, b_n]$

Estimarea de eroare: lungimea

lui $\underbrace{[a_n, b_n]}_{L_n}$



approx pt x^*

$\approx \dfrac{a_n + b_n}{2}$

Conv liniară: next error $\le q$ (err. actuală)

$(1/2;\beta, q)$ factor fix

$$r_i \le q\, r_{i-1} \overset{\times q}{\le} \dots \overset{\times q}{\le} q^m r_0$$

$q^m \to 0$

r_0 err init

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} \le q < 1$$

Conv super liniară

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} \to 0$$

Conv ordin p: $r_{i+1} \le C r_i^p \quad p > 1$

$$r_i < 1 \Rightarrow r_i^p < r_i$$

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} \le C r_i^{p-1} \to 0$$

Dacă $r_i \to 0$

• $\gamma^m = r_m \Rightarrow \frac{r_{m+1}}{r_m} = \gamma < 1$

Conv liniară

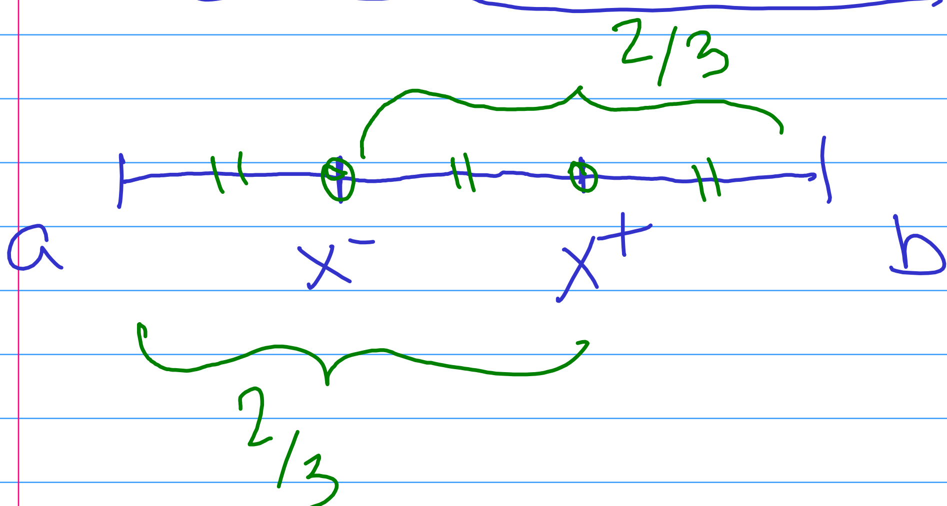
• $(\gamma^{n^2}) \to 0$

$$\frac{\gamma^{(n+1)^2}}{\gamma^{n}} = \gamma^{(n+1)^2-n^2} = \gamma^{2n+1} \to 0$$

$$\gamma < 1$$

• $(\gamma^{2^n}) \to 0$

$$\gamma^{2^{n+1}} = \left(\gamma^{2^n}\right)^2$$



$err(x_i) = r_i = |S_i|$ (lungimea intervalului)

$r_{i+1} = \frac{2}{3} r_i \Rightarrow$ <u>conv liniară</u>

Alg. trisecție: raportul de convergență = $\frac{2}{3}$
"viteză"

(în funcție de nr. de iterații)

În funcție de nr de evaluări:

- 2 eval / iterație

$$|x^* - x_i| = \left(\frac{2}{3}\right)^i |b-a|$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}^{\,2i} |b-a|$$

$2i \to$ am efectuat $2 \times i$ evaluări