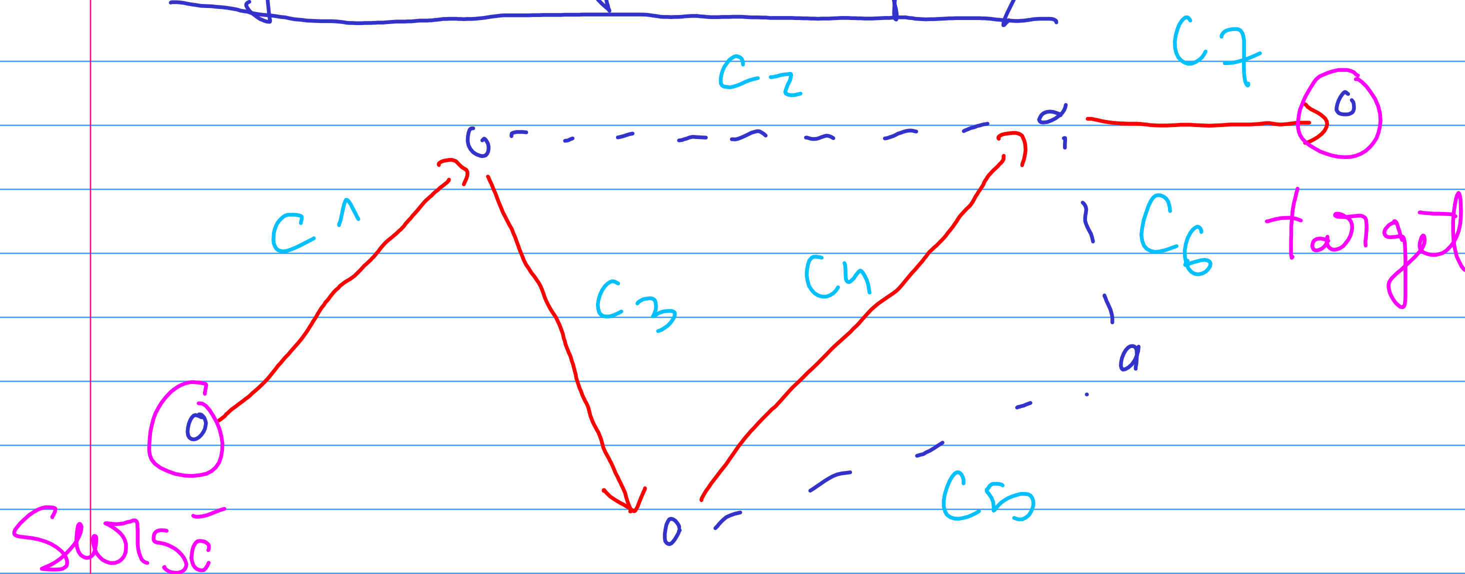
Algoritmul Dijkstra: Aplicații



- obiectiv: găsirea unui drum de lungime minimă între nodul sursă și nodul țintă

Optim discretă: nr finit de variabile

$A = \{x_1, \dots, x_n\}$

O funcție este evaluată pt fiecare variabilă, apoi se selecționează cea mai mică/mare valoare.

Dificultatea? Dacă n este "foarte mare" evaluarea tuturor calculator nu este fezabilă în practică.

- alternativa? Să exploatăm structura problemei.

→ Optimal assignment

→ Alg. Dijkstra: drumuri de lungimi min într-un graf

Project Euler: Problema 18

3

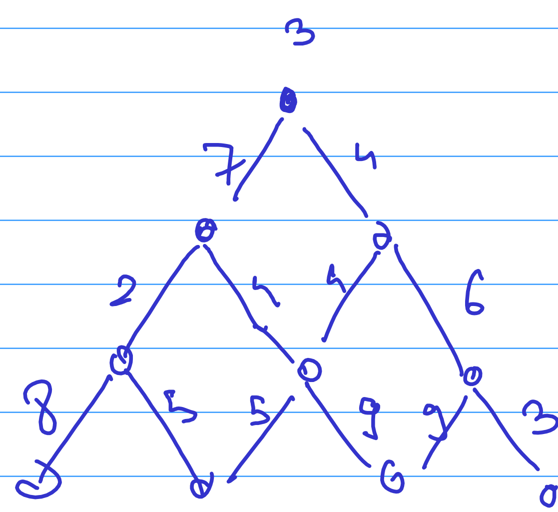
7 4

2 4 6

8 5 9 3

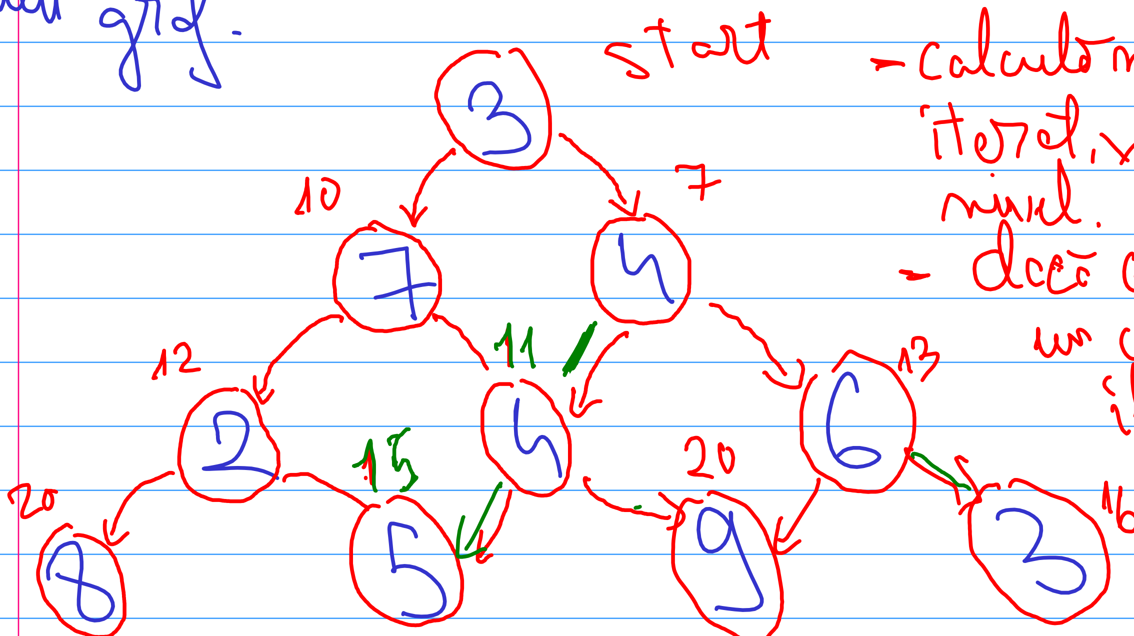
Găsiți drumul care minimizează suma.

Graf?



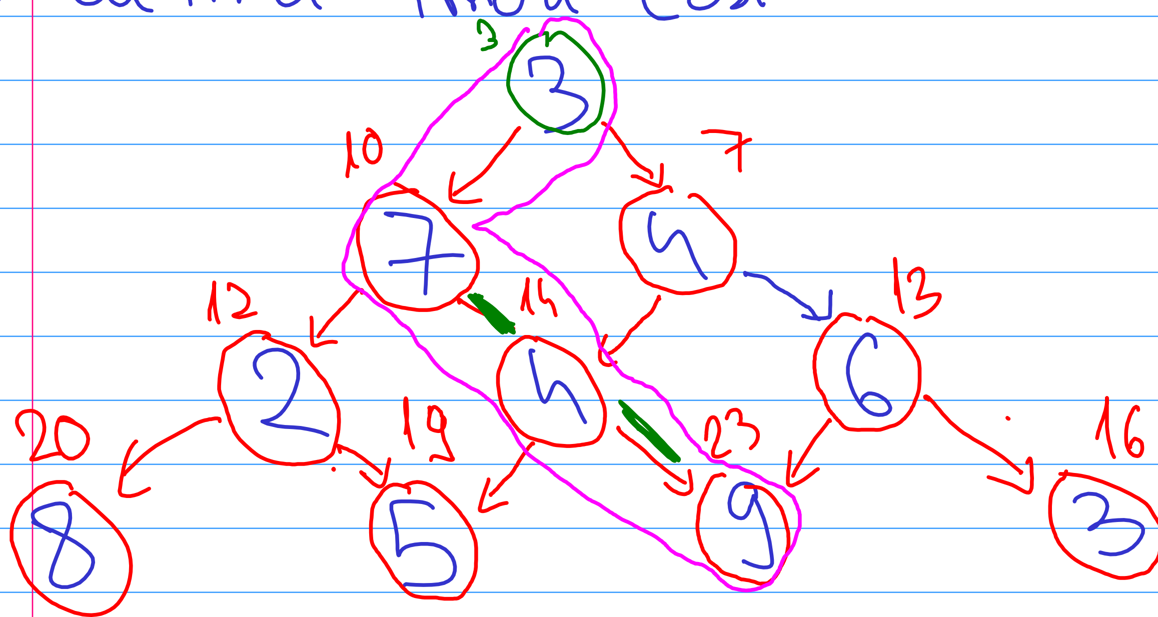
→ Alg. Dijkstra: pornim de la nodul sursă (vârful triunghiului) și aplicăm algoritmul pt fiecare nod

Propunem un alg inspirat de Dijkstra dar care nu utilizează explicit construcția unui graf.



- calculăm costurile iterativ, nivel cu nivel.
- dacă obținem un cost mai mic îl reținem.

Pentru maximizare: reținem drumul cu cel mai mare cost.

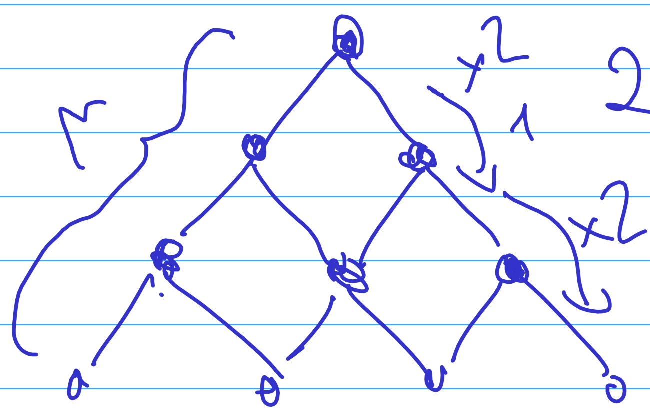


→ algoritmul propus:
→ explorează fiecare nod
→ compară cel mult 2 valori/nod

Complexitate: nr. noduri din triunghi

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \rightsquigarrow O(n^2)$$

→ algoritmul brute force: explorează toate drumurile.



2 opțiuni

$2 \cdot 2 = 2^2$ opțiuni

2^3 drumuri

n rânduri: 2^{n-1} drumuri din vârf până pe ultimul rând.

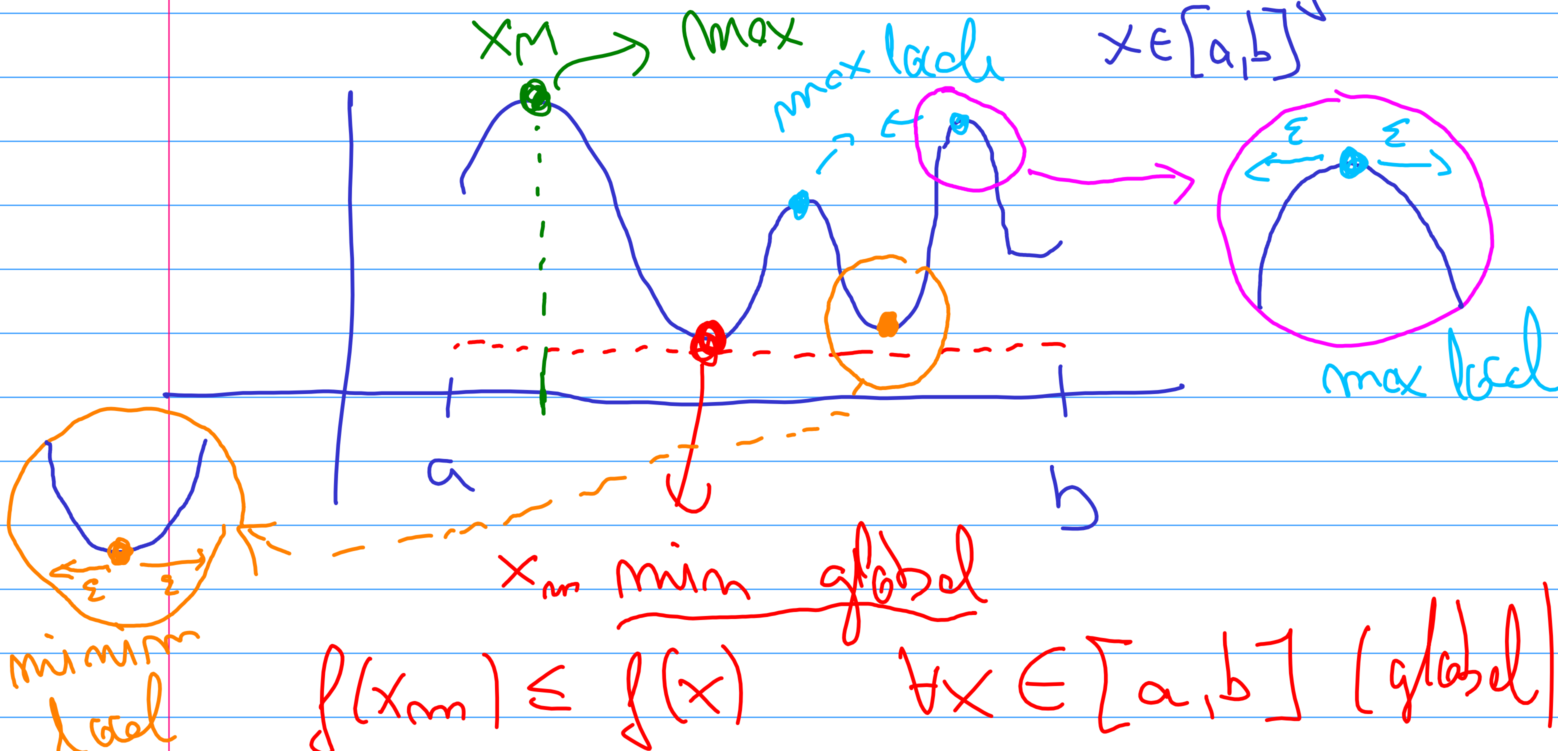
→ brute force: complexitate $O(2^{n-1})$

Optimizare continuă

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$\max_{x \in [a,b]} f(x)$$



$f(x_m) \le f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ (global)

$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ (global)

- În general algoritmii de opt continuă vor găsi un min/maxim <u>local</u>.

Existența unui minim/maxim

$$\left.\begin{array}{l} - f \text{ definită pe un compact} \\ - f \text{ continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{existența min/max}$$

Exemplu: $f(x) = e^x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$$

Dar $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$

$(\neq)$

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ nu are soluții

- f continuă
- $\mathbb{R}$ nu este compactă $\left\{\begin{array}{l} \to \text{mărginită} \\ \to \text{inchisă} \end{array}\right.$

Exemplu 2:

$f(x)=x$

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$

$\overset{0}{0} \in (0,1) \Rightarrow [0,\overset{1}{1}]$ nu este închis.

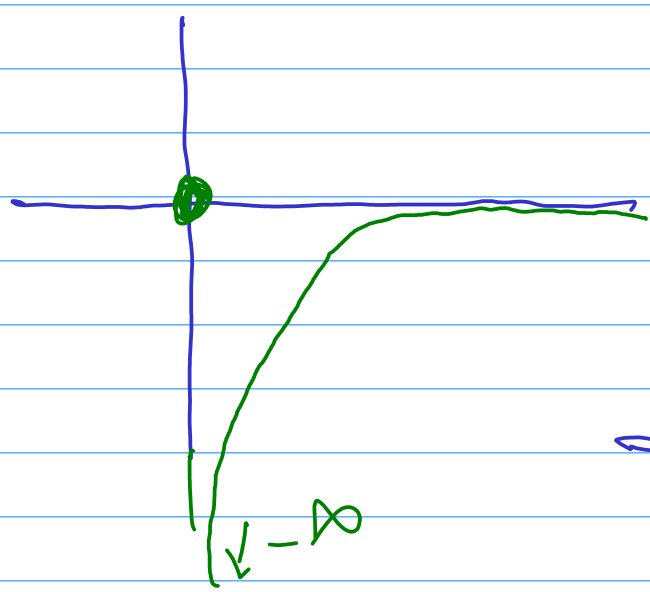
$\inf\limits_{x\in(0,1)} x = 0$ Dar nu există $x\in(0,1)$ a.i. $f(x)=0$

Deci $\min\limits_{x\in(0,1)} f(x)$ nu are soluții.

f cont

Exemplul 3:

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}-1/x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$



$\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ nu admite soluții.

Existența pe $\mathbb{R}$:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

"infinită la infinit"

$\Rightarrow \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ admite soluții.

Demonstrație:

- nu este "interesant" să căutăm valorile mici ale lui f spre $\pm\infty$.
- minimul lui f este într-un int. compact.

Riguros matematic:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Alegem $x_0 \in \mathbb{R}$, $\underline{M} = f(x_0)$

$\Rightarrow \exists\, L > 0$ a.î. pentru $x > L$ sau $x < -L$ avem $f(x) > M$

Definim $K = \{x : f(x) \leq M\}$

f continuă și $K \subset [-L, L]$

$\Rightarrow$ K compactă

$\Rightarrow$ $\min_{x \in K} f(x)$ admite soluții

Dar $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$

$\Rightarrow$ problema $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ admite soluții. $\blacksquare$

Existența unei "margini inferioare"

- $\inf_{x \in A} f(x) > -\infty$

$\exists (x_n) \subset A$ a.î. $f(x_n) \to \inf_{x \in A} f(x)$

ȘIR MINIMIZANT

- extragem un subșir care converge "compacitate"

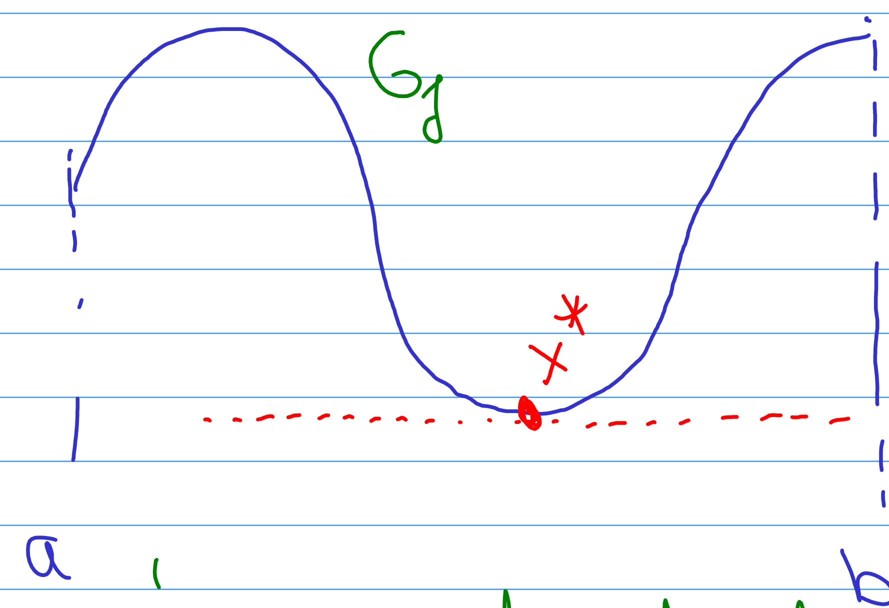
$x_{m_k} \to x^*$

- f continuă $\Rightarrow f(x_{m_k}) \to f(x^*)$

$\Rightarrow f(x^*) = \inf_{x \in A} f(x)$

$\Rightarrow$ existență.

Cum găsim soluții



$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f derivabilă $\Leftrightarrow \exists$ o dreaptă tangentă la G_f în acel punct

Derivata $f'(x_0)$ = panta dreptei tangente la graficul lui f în $(x_0, f(x_0))$

Ecuația tangentei: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$

Geometric: tangenta la un pct de minim este orientată $\Rightarrow$ $\cos x = 0$

$\Rightarrow$ panta dreptei $= 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x^*)=0}$

Dem riguroasă:

$$f'(x^*) = \lim_{x\to x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$$

$$f'(x^*) = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x>x^*}} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} \geq 0$$

+ +

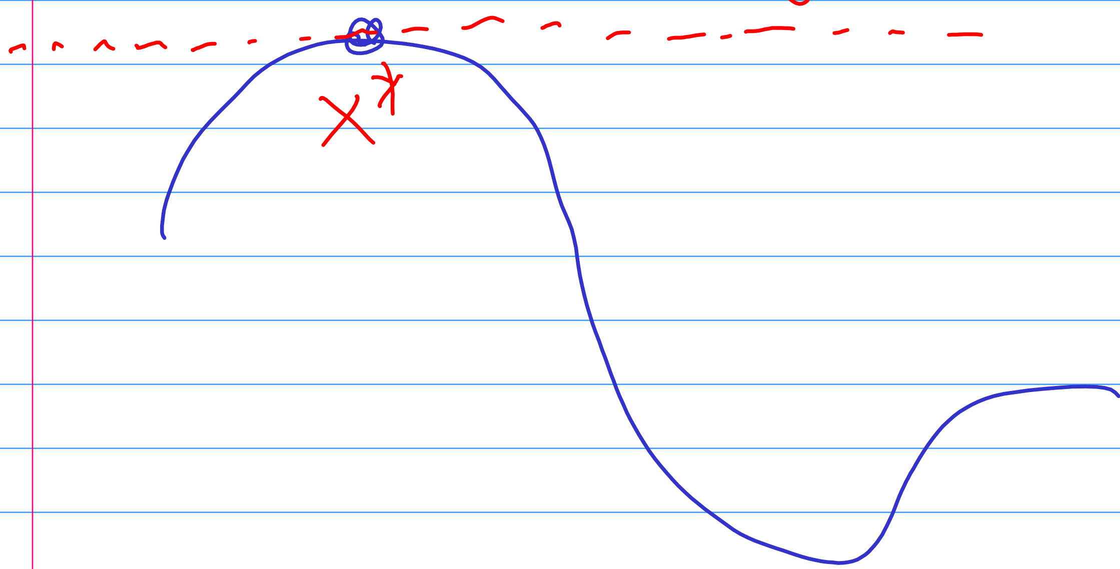
$$f'(x^*) = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x<x^*}} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} \leq 0$$

+ −

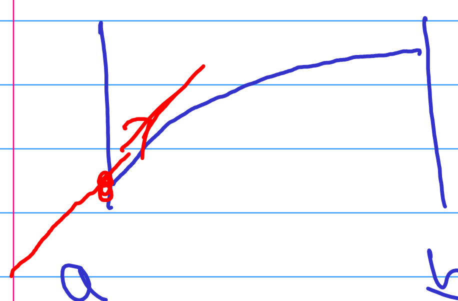
$\Rightarrow f'(x^*) = 0$ (thm Fermat)

Este valabilă și pt un maxim local.

$f'(x^*) = 0$



Dacă minimul este capătul intervalului



$\Rightarrow \underline{f'(a) \geq 0}$

Derivata arată monotonia funcției în vecinătatea punctului:

$f' \geq 0 \Rightarrow f.$ cresc.

$f' \leq 0 \Rightarrow f.$ descresc.

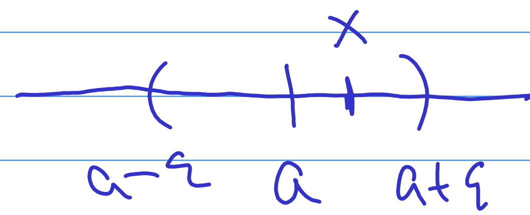
Etc.

Condițiile care folosesc doar f' sunt numite condiții de ordin 1.

Deriv 1: aproximarea lui f cu o dreaptă.

Deriv a 2-a: aprox f cu o parabolă

Taylor:



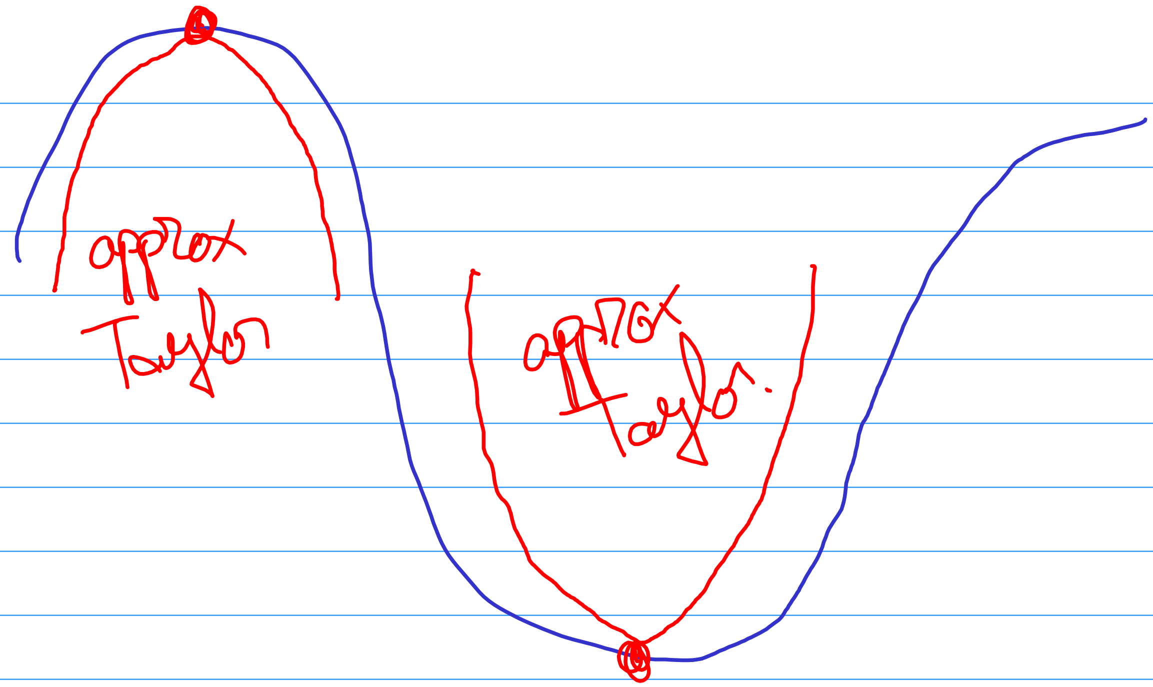
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$f \in C^k$ dacă f e deriv de k ori și $f^{(k)}$ este continuă.

Dacă $f \in C^3$ atunci "aproape" de a avem

$$f(x) \approx \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{\text{gradul 2}}$$

parabolă.



minim: parabola are vârful "în jos"

$\Rightarrow$ coef $x^2 \geq 0$

$\Rightarrow f''(a) \geq 0$

maxim: $f''(a) \leq 0$